**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**Ржищівський індустріально-педагогічний технікум**

**Методичні вказівки та індивідуальні завдання**

**до вивчення дисципліни «Вища математика» для студентів**

**всіх спеціальностей**

**( частина 2)**

|  |  |
| --- | --- |
|  | Затверджено |
|  | на засіданні циклової комісії |
|  | математики та інформатики |
|  | Протокол № \_\_\_\_\_ від \_\_\_\_\_\_\_\_\_ |

**Ржищів**

**2016**

Методичні вказівки та індивідуальні завдання до вивчення дисципліни “Вища математика” для студентів напряму 6.050103 – Програмна інженерія

/ Укл.: Н.В.Корж., В.Я. Коба. – Ржищів: РІПТ, 2016. – 45с.

Підібрано довідковий матеріал; методичні вказівки до вивчення кожної теми; варіанти індивідуальних завдань.

Призначена для студентів всіх спеціальностей

Укладачі: Н.В. Корж, ст. викладач

В.Я.Коба, ст. викладач

Відповідальний за випуск Н.В. Корж, ст. викладач.

Рецензент Т.І.Безсмертна, ст. викладач

# **ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ “ВИЩА МАТЕМАТИКА”**

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ**

1. Матриці і визначники. Розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера.

2. Вектори та операції над ними. Застосування векторів.

Вектори. Лінійні дії над векторами. Властивості лінійних операцій над векторами. Колінеарні вектори. Скалярний добуток векторів.

4. Пряма лінія на площині.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між прямими. Рівняння прямої, яка проходить через дві точки. Загальне рівняння прямої. Відстань від точки до прямої.

5. Криві другого порядку.

Коло. Еліпс. Гіпербола. Парабола.

**ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ.**

**ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ (РІВНЯННЯ ДОТИЧНОЇ ТА**

##### НОРМАЛІ). ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЇ

1. Функції та їх границі.

Поняття функції. Способи завдання функцій. Основні елементарні функції. Означення послідовності та її границі. Розкриття невизначеностей. Перша і друга «важливі» границі.

1. Похідна та диференціал функції, їх застосування.

Означення похідної, її геометричний та фізичний зміст. Правила диференціювання. Диференціал функції в точці. Екстремум функції. Правило Лопіталя. Обчислення похідної складеної функції, дотична і нормаль до плоскої кривої.

**Невизначений інтеграл**

Поняття первісної функції та невизначеного інтегралу, його властивості. Таблиця інтегралів. Заміна змінної у невизначеному інтегралі. Інтегрування частинами. Інтегрування дробово-раціональних функцій. Інтегрування деяких тригонометричних функцій. Комплексні числа та дії над ними.

**ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ**

**ВЕКТОРИ**

**Дії над векторами**

1. Додавання векторів 2. Віднімання векторів

3. Множення на число (приклади)





**Вектори у декартовій системі координат**



** ,

 .

Довжина вектора .

Напрямні косинуси  ,  , .

Дії над векторами, заданими у координатній формі

**,**

**,**

** .**

Умова колінеарності векторів  .

Скалярний та векторний добутки векторів

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Добуток | Скалярний | Векторний |
| Позначення |  |  |
| Тип ве­личи­ни | Число | Вектор |
| Означення |  | , якщо:  1)  перпендикулярний  векторам  и ;  2) трійка векторів ,, −  права;  3) |
| Властивості |  |  |
| Добутки ортів |  |  |
| Обчислення  в ДСК |  |  |
| Основні  задачі | довжина вектора    косинус кута між векторами    проекція вектора на інший вектор    умова перпендикулярності | площа паралелограма, побудованого на векторах  та    площа трикутника    висота паралелограма    висота трикутника |

**Мішаний добуток векторів**

|  |  |
| --- | --- |
| Позначення | або |
| Означення |  |
| Властивості |  |
| Обчислення  у ДСК |  |
| Основні задачі | умова компланарності трьох векторів    орієнтація трійки векторів:  − права трійка ;  − ліва трійка  об’єм паралелепіпеда, побудованого на векторах    об’єм піраміди, побудованої на векторах    висота паралелепіпеда    висота піраміди |

**ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ**

Найпростіше рівняння Рівняння з кутовим коефіцієнтом

. , .

Загальне рівняння Рівняння прямої, що проходить у

. заданому напряму (рівняння в’язки)

 .

Канонічне рівняння Рівняння у відрізках на осях

.  .

Нормальне рівняння

.



Рівняння прямої, що проходить

через дві точки

; .

Умова паралельності прямих .

Умова перпендикулярності прямих  .

Кут між прямими (гострий) .

Відстань від точки ***М*** до прямої  ,

або  .

**КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ**

**Еліпс та гіпербола**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Крива | ***Еліпс з фокусами***  ***на вісі Ох*** | ***Гіпербола з фокусами***  ***на вісі Ох*** |
| Рівняння | , |  |
| Піввісі  (**2*а, 2b – вісі****)* | ***a***– велика  ***b*** *–*мала | ***a*** *–* дійсна  ***b*** – уявна |
| Відстань від центра до фокусів |  |  |
| Координати фокусів | ***F1(c; 0); F2(-c; 0)*** | ***F1(c; 0); F2(-c; 0)*** |
| Ексцентриситет |  |  |
| Рівняння директрис |  |  |
| Рівняння асимптот | *––* |  |
| Відстані від точки М до фокусів |  |  |
| Рисунок |  |  |

**Параболи, симетричні відносно осі Ох**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **рівняння** |  |  |
| **координати**  **фокуса** |  |  |
| **рівняння**  **директриси** |  |  |
| **рисунок** |  |  |

**Параболи, симетричні відносно осі Оу**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **рівняння** |  |  |
| **координати**  **фокуса** |  |  |
| **рівняння**  **директриси** |  |  |
| **рисунок** |  |  |

**Зсунені криві**

Коло 



Еліпс  Гіпербола 

Параболи  

# **ГРАФІКИ ОСНОВНИХ ЕЛЕМЕНТАРНИХ ФУНКЦІЙ**

**Алгебраїчні функції**

  ,   , 

 ,   , 

 ,  ,   ,  

**Трансцендентні функції**

, , , ,

**ГРАНИЦІ**

**Перша важлива границя** .

**Друга важлива границя** .

 .

**МЕТОДИ ОБЧИСЛЕННЯ ГРАНИЦЬ**

У випадку невизначеності  треба поділити чисельник та знаме­нник на найвищий степінь змінної.

1) =;

2) ===

==;

3) =

==0.

У разі невизначеності  треба чисельник та знаменник розкладати на множники.

4).

Якщо границя містить ірраціональність, позбутися її за допомогою формул скороченого множення; якщо не­визначеність не зникне, а трансформується у , поділити на старший степінь змінної (з урахуванням добування коренів).

5)===

===

=.

Якщо вираз має тригоно­метричні функ­ції, перетворити суми тригоно­метричних функцій на добутки; множники, границя кот­рих не дорівнює 0 або , замінити цими границями; для кожного множника, який прямує до 0, побудувати 1-у важливу границю.

6==) ==.

====

==**6**

У випадку степенево-показникової функції (невизначеність  ) основу записати як суму 1 та нескінченно малої функції, побудувати другу важливу границю та перейти до границі у показнику.

7) ====

=== ;

====

====.

## ПОХІДНІ

**Похідні основних Похідні складених**

**елементарних функцій елементарних функцій**

## 1. 1а.

## 2.

3.  3а. 

4.  4а. 

5.  5а. 

6.  6а. 

7.  7а. 

8.  8а. 

9.  9а. 

10.  10а. 

11.  11а. 

12.  12а. 

13.  13а. 

14.  14а. 

15.  15а. 

16.  16а. 

17.  17а. 

**ПРАВИЛА ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ**

1.  2. 

3.  4. 



**ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ**

Для дослідження функції і побудови її графіка студент повинен добре знати, що при зростанні функції - , при спаданні -  і розуміти різницю між необхідною та достатньою умовами існування екстремуму функції, а також необхідною і достатньою умовами існування точок перегину.

 або не існує – необхідна умова існування екстремуму;

 або не існує – необхідна умова існування точок перегину.

Із цих умов знаходяться критичні точки.

Достатня умова для існування екстремуму в т. або точки перегину – зміна знака відповідно до першої і другої похідної при переході через критичну точку.

 – функція зростає **↗** ;  – функція спадає **↘** ;

 – функція вгнута  ; – функція опукла .

**ВЛАСТИВОСТІ НЕВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА**

1. а) .

б) .

в) .

1. а) .

б) .

в) , якщо .

**Заміна змінної**



 → 

 → 

 → 

 → 

 → 

 → 

 → , 

 → 

 → 

 → , 

 → , 

 → 

 → 

**Інтегрування частинами**



1)  ;  ; .

2) ,  ; ; .

3) Циклічні інтеграли

;  ; ; .

**Таблиця інтегралів**

1.  , 









2. 



3. 



4. 



5. 

6. 



7. 



8. 

9. 

10. 

11. 

12. 

13. 

14. 

15. 

16. 



17. 





**КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА**

Вираз вигляду , де  і - дійсні числа, , називається *комплексним числом (в алгебраїчній формі).*

Комплексне число = називається *комплексно-спряженим числом* до комплексного числа .

*Дії* над комплексними числами. Нехай дано два комплексні числа:  та . Тоді

1) ;

2) ;

3) =.

Для будь-якого комплексного числа  маємо: .

Величина  називається *модулем комплексного числа.*  Кут , що визначений наступними рівностями

, , називається *аргументом комплексного числа.*

Будь-яке комплексне число можна записати в тригонометричній формі:

,

де .

**Приклад.** Дано комплексне число . Треба:

записати дане число в алгебраїчній та в тригонометричній формах.

*Розв’язання* Приведемо комплексне число  до алгебраїчної форми:.

Для цього помножимо чисельник та знаменник дроби  на число , комплексно-спряжене до знаменника. Отримаємо:

**.**

Це й є алгебраїчна формакомплексногочисла , де .

Приведемо комплексне число  до тригонометричного виду: , де - модуль комплексного числа , - аргумент цього числа.

Знайдемо . Для знаходження  маємо систему:

 ,

або  ,

і тоді . Звідси, тригонометрична форма комплексного числа  має вигляд: .



### Практичні роботи

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***1*** | ***1*** | ***1*** |

***Тема : «Дії з матрицями. Обчислення визначників 2-го та 3-го порядків».***

Мета: Виробляти вміння та навички виконання дій над матрицями. Засвоїти алгоритми обчислення визначників 2-го та 3- го порядків.

**Завдання**

1. Дано матриці А та В. Виконати дії додавання та віднімання даних матриць.
2. Обчислити матриці 2А та -3В.
3. Виконати множення А\*В
4. Обчислити визначники даних матриць.
5. Обчислити визначники матриць С та D.
6. Виконати множення матриць С та D.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вар. | матриці А | матриці В | вар. | матриці А | матриці В |
| 1) | 6 -3  -2 4 | 4 -7  -6 2 | 2) | 9 -4  -2 6 | -8 3  -2 4 |
| 3) | -5 -4  3 8 | 8 -4  6 9 | 4) | 3 -6  -8 5 | -4 7  6 9 |
| 5) | -4 6  -5 2 | 3 -7  -8 -2 | 6) | -5 -4  3 9 | 8 -4  6 9 |
| 7) | -7 9  -3 8 | -5 8  -3 7 | 8) | 5 -4  -6 -3 | -2 -7  6 9 |
| 9) | 8 -8  -5 6 | 3 -3  7 5 | 10) | -5 -7  6 6 | -3 8  6 7 |
| 11) | -9 4  5 3 | -6 7  4 2 | 12) | 9 8  -4 3 | 7 4  -5 3 |
|  | | | | | |
| вар. | матриці С | матриці D | вар. | матриці С | матриці D |
| 1) | -1 -6 1  4 4 5  -5 2 3 | -5 -3 4  6 7 6  0 4 1 | 2) | 5 -2 3  -6 1 4  0 8 -1 | 7 8 0  -2 6 1  -3 1 -2 |
| 3) | -2 1 5  4 9 -1  -3 4 8 | -4 5 7  2 4 2  0 3 1 | 4) | 8 8 4  1 -3 -1  -2 2 0 | 4 5 0  2 8 -1  -3 2 2 |
| 5) | 4 1 7  2 5 1  -3 0 -3 | 0 8 4  -5 -2 1  3 4 2 | 6) | -2 9 1  -3 0 2  -4 3 6 | 4 1 2  -3 8 -4  -2 0 3 |
| 7) | -6 1 5  1 4 0   1. 2 4 | 1 0 3  6 8 4  1 1 2 | 8) | 5 4 2  -2 6 -4   1. 0 3 | 4 0 1  1 5 -5  -3 0 2 |
| 9) | 4 8 2  -3 1 -1  5 0 -2 | 4 5 6  -1 -2 0  2 5 1 | 10) | 5 5 6  -2 -4 4  -1 2 1 | 1. -1 2   2 -4 4  3 2 -3 |

Вказівки до вибору завдань, що відповідають даному варіанту:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вар.1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1;1 | 2;2 | 3;3 | 4;4 | 5;5 | 6;6 |
| вар.7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 7;7 | 8;8 | 9;9 | 10;10 | 11;1 | 12;2 |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***2*** | ***2*** | ***-*** |

***Тема: «Обчислення визначників вищих порядків».***

1. Обчислити визначник 3-го порядку, розклавши його за елементами першого рядка.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| вар. | матриці А | вар. | матриці В | вар. | матриці А | вар. | матриці В |
| 1) | -1 -6 1  4 4 5  -5 2 3 | 2) | -5 -3 4  6 7 6  0 4 1 | 3) | 5 -2 3  -6 1 4  0 8 -1 | 4) | 7 8 0  -2 6 1  -3 1 -2 |
| 5) | -2 1 5  4 9 -1  -3 4 8 | 6) | -4 5 7  2 4 2  0 3 1 | 7) | 8 8 4  1 -3 -1  -2 2 0 | 8) | 4 5 0  2 8 -1  -3 2 2 |
| 9) | 4 1 7  2 5 1  -3 0 -3 | 10) | 0 8 4  -5 -2 1  3 4 2 | 11) | -2 9 1  -3 0 2  -4 3 6 | 12) | 4 1 2  -3 8 -4  -2 0 3 |

1. Обчислити визначник 4-го порядку, використовуючи властивості визначників.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 2 | 1 | 6 | 0 |  |  | 1 | 5 | 3 | -2 |
| 1) | 3 | 3 | 1 | -5 |  | 2) | 2 | 1 | 5 | -1 |
|  | 1 | -5 | 2 | -3 |  |  | -4 | 3 | 1 | -3 |
|  | -5 | 0 | -3 | -1 |  |  | 1 | -4 | 6 | 4 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 4 | -3 | 4 | 2 |  |  | 6 | 3 | 1 | 0 |
| 3) | 2 | 6 | 5 | -3 |  | 4) | 5 | 1 | 2 | 7 |
|  | -1 | 1 | 3 | 0 |  |  | 1 | 3 | -1 | 4 |
|  | -4 | 3 | -1 | 4 |  |  | -2 | 4 | 3 | 3 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 2 | 0 | 4 | 3 |  |  | 3 | 1 | -6 | 3 |
| 5) | -3 | 8 | -2 | -5 |  | 6) | -4 | 5 | 1 | -3 |
|  | 4 | 1 | 4 | 1 |  |  | 1 | -2 | 0 | 2 |
|  | 1 | 3 | 3 | 2 |  |  | 0 | 3 | 2 | 1 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 9 | -4 | -5 | 2 |  |  | 5 | 4 | 1 | 4 |
| 7) | 1 | 0 | -1 | 1 |  | 8) | -1 | -2 | 0 | 6 |
|  | 2 | 1 | 3 | 4 |  |  | 2 | -1 | 2 | 2 |
|  | 3 | 6 | 7 | 3 |  |  | 3 | 3 | 5 | 5 |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | 6 | 0 | 1 | -3 |  |  | 8 | -2 | 4 | 7 |
| 9) | 2 | 5 | 6 | 5 |  | 10) | 1 | -3 | 2 | 2 |
|  | -1 | 4 | 2 | 1 |  |  | 3 | 6 | 1 | -4 |
|  | 1 | 2 | 4 | 6 |  |  | 5 | 1 | 0 | 3 |

## *Практичні робота №*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***3, 4*** | ***3, 4*** | ***2,3,4*** |

Тема: Розв′язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера (№2)

Тема: Розв′язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса

( №3)

Тема: Розв′язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці (№4)

Мета: Виробити навички розв′язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера, методом Гаусса та методом оберненої матриці.

**Завдання.** Розв’язати систему рівнянь методом Крамера, Гаусса, оберненої матриці.

**1.  6.**

**2.  7.**

**3.  8.**

**4.  9.**

**5.  10.**

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***-*** | ***-*** | ***5*** |

Тема: Система координат в просторі. Відстань між двома точками. Координати середини відрізка

Мета : Виробити навички розв′язування вправ на знаходження координат відрізків, відстані між двома точками та координат середини відрізка.

**Завдання.** Задано координати вершин піраміди. Знайти довжини її бічних ребер та середні лінії основи піраміди . ( Основа піраміди - трикутник А2А3А4)

**1. .**

**2. .**

**3. .**

**4. .**

**5. .**

**6. .**

**7. .**

**8. .**

**9. .**

**10. .**

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***-*** | ***-*** | ***6*** |

Тема: Операції над векторами, заданими своїми координатами. Скалярний добуток векторів.

**Завдання.** **.** Задано координати точок А, В, С.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант |  |  |  |
| **1** | **(-4; 2)** | **(1; 5)** | **(-1; 5)** |
| **2** | **(4; 1)** | **(2; 3)** | **(1; -2)** |
| **3** | **(-6; 1)** | **(3; 7)** | **(-2; 5)** |
| **4** | **(-1; 6)** | **(3; 3)** | **(8; 0)** |
| **5** | **(1; -1)** | **(2; 5)** | **(4; -1)** |
| **6** | **(4; -3)** | **(-1; 5)** | **(5; -1)** |
| **7** | **(3; 0)** | **(1; 6)** | **(7; -2)** |
| **8** | **(0; 2)** | **(-1; 6)** | **(-4; -2)** |
| **9** | **(2; 1)** | **(3; -1)** | **(9; -1)** |
| **10** | **(-1; 2)** | **(1; 8)** | **(4; 4)** |

Знайти: координати векторів АВ, АС, СВ; довжини даних векторів; суму та різницю векторів АВ та АС ,

добуток вектора АВ та ВС на число 2 та -3 ( відповідно) ; скалярний добуток векторів ВС та АВ; кут між векторами ВС та АВ.

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***-*** | ***-*** | ***7*** |

***Тема***: Векторний та мішаний добутки векторів.

**Завдання 1.** Використовуючи дані практичної роботи №5 обчислити об′єм піраміди та площу кожної з бічних граней .

**Завдання 2.** Використовуючи дані практичної роботи №6 перевірити чи є вектори АВ та ВС перпендикулярними або паралельними.

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***5*** | ***5*** | ***8*** |

Тема: Різні види рівняння прямої. Найпростіші задачі про пряму.

**Завдання.** Задано координати вершин трикутника АВС.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант |  |  |  |
| **1** | **(-4; 2)** | **(1; 5)** | **(-1; 5)** |
| **2** | **(4; 1)** | **(2; 3)** | **(1; -2)** |
| **3** | **(-6; 1)** | **(3; 7)** | **(-2; 5)** |
| **4** | **(-1; 6)** | **(3; 3)** | **(8; 0)** |
| **5** | **(1; -1)** | **(2; 5)** | **(4; -1)** |
| **6** | **(4; -3)** | **(-1; 5)** | **(5; -1)** |
| **7** | **(3; 0)** | **(1; 6)** | **(7; -2)** |
| **8** | **(0; 2)** | **(-1; 6)** | **(-4; -2)** |
| **9** | **(2; 1)** | **(3; -1)** | **(9; -1)** |
| **10** | **(-1; 2)** | **(1; 8)** | **(4; 4)** |

Знайти:

1. Рівняння медіани ВК ( Записати її чотири види).
2. Довжину медіани ВК.

3. Рівняння висоти АР.

5. Довжину висоти АР.

6. Точку перетину медіани ВК та висоти АР.

7. Кут КВС.

8. Площу трикутника АВС.

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***6*** | ***6*** | ***9,10*** |

Тема: Розв′язування задач на складення рівняння еліпса ( кола).

Розв′язування задач на складення рівняння гіперболи та параболи.

**Задача 1.** Знайти координати центра і радіус кола. Побудувати коло.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант | Рівняння кола | Варіант | Рівняння кола |
| **1** |  | **6** |  |
| **2** |  | **7** |  |
| **3** |  | **8** |  |
| **4** |  | **9** |  |
| **5** |  | **10** |  |

**Задача 2.** Складіть рівняння еліпса з фокусами на осі ***Ох***, якщо відстань між фокусами дорівнює ***2с***, ексцентриситет ε :

|  |  |
| --- | --- |
| відстань між фокусами | ексцентриситет |
| 12 | 2/3 |
| 16 | 2/3 |
| 6 | ¾ |
| 8 | 1/3 |
| 20 | 2/5 |
| 16 | 3/4 |

**Задача 3**. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі ***Ох***, якщо її дійсна вісь дорівнює ***2а***, а відстань між фокусами дорівнює 2с:

|  |  |
| --- | --- |
| дійсна вісь | відстань між фокусами |
| 12 | 6 |
| 10 | 4 |
| 22 | 10 |
| 18 | 6 |
| 14 | 8 |
| 16 | 10 |

**Задача 4.** Побудувати лінію. Знайти довжини осей, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння директрис (для еліпса), рівняння асимптот (для гіперболи).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант | Рівняння лінії | Варіант | Рівняння лінії |
| **1** |  | **7** |  |
| **2** |  | **8** |  |
| **3** |  | **9** |  |
| **4** |  | **10** |  |
| **5** |  | **11** |  |
| **6** |  | **12** |  |

**Задача 5**. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, яка симетрична відносно осі ***Оy*** і проходить через точку ***А:***

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Варіант | **Точка А** | Варіант | **Точка А** |
| **1** | **(-6;12)** | **4** | **(-2;4)** |
| **2** | **(2;4)** | **5** | **(6;-12)** |
| **3** | **(4;16)** | **6** | **(-4;16)** |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
|  |  | ***11*** |

Тема: Підсумкова робота по розділу « Елементи аналітичної геометрії»

Варіант 1

1.Дано пряма у=2х-3 . Перевірити чи проходить дана пряма через точки

А(1;-1) ; В(0;9) ; С( 2;1) ; Д( -1;-1).

2.Скласти рівняння прямої, що проходить через точки А (1;2) та В(-5;4)

і рівняння прямої, що проходить через точки С(2;-3) та К( 5;-1) . Визначте

кут між ними.

3. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що півосі його відповідно дорівнюють

1. і 2.

4.Знайти точки перетину параболи з прямою 4х-у+5=0.

Варіант 2

1. Дано пряма у=2х-4 . Перевірити чи проходить дана пряма через точки А(1;-2) ; В(-3;9) ; С( 2;0) ; Д( -1;-4).

2.Скласти рівняння прямої, що проходить через точки А ( 1;2) та В(-5;4)

і точки С(7;-1) та К (5;4). Визначте кут між ними.

3. Скласти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат, знаючи, що відстань між вершинами 10, а відстань між фокусами 12.

4. Знайти точки перетину параболи з прямою 6х+у-6=0.

Варіант 3

1. Дано пряма у=5х+ 4 . Перевірити чи проходить дана пряма через точки А(1;1) ; В(0;9) ; С( 2;8) ; Д( -1;-1).

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки А ( 5;-4) та В(-2;3)

і прямої, що проходить через точки С(3;-4) та К (2;-5). Визначте кут між

ними.

3. Скласти рівняння еліпса, знаючи, що півосі його відповідно дорівнюють

5 і 3.

4. Знайти точки перетину параболи з прямою 9х-2у+2=0.

Варіант 4

1. Дано пряма у=2х-7 . Перевірити чи проходить дана пряма через точки А(1;1) ; В(0;-7) ; С( 1;8) ; Д( 4;1).

2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точки А ( 1;3) та В(-2;4)

і рівняння прямої, що проходить через точки С( 5;-2) та К (6;3). Визначте

кут між ними.

3. Скласти рівняння гіперболи, осі якої співпадають з осями координат, знаючи, що відстань між вершинами 6, а відстань між фокусами 8.

4. Знайти точки перетину параболи з прямою 6-у-6х=0.

***Практична робота №***

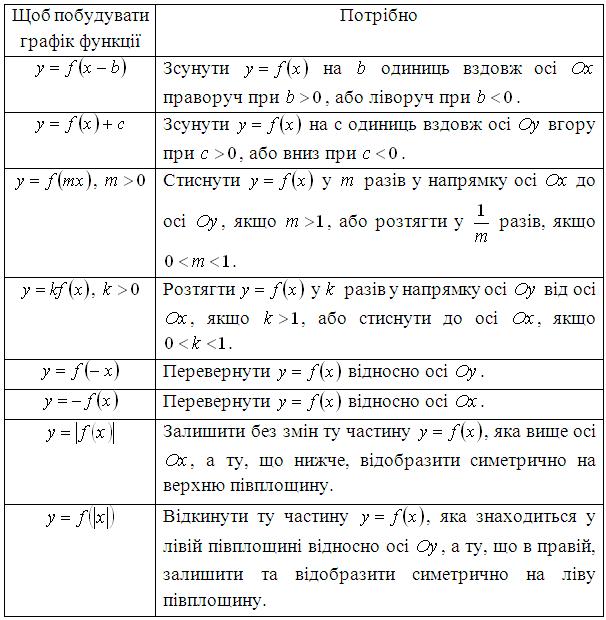
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***7 (розв′язування вправ)*** | ***7*** | ***12,13*** |

Тема: Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень.

Тема: Побудова графіків функцій, які містять знак абсолютної величини.

Якщо відомий графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image008.png, то за допомогою геометричних перетворень можна побудувати графіки більш складних функцій.

**Геометричні перетворення графіків функцій**



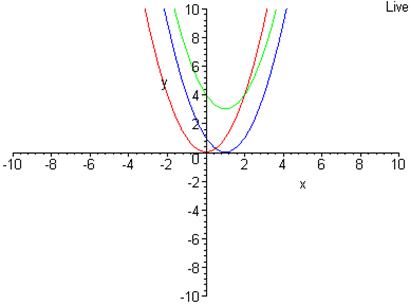
***Приклад 1:***  Побудувати графік функції

http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image012.png

Розв′язащщя:

Основним графіком для даного є графік http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image014.png. Потім будуємо графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image016.png, для цього зсуваємо графік http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image014.png на 1 одиницю праворуч вздовж осі http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image018.png. Далі будуємо http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image012.png, зсуваючи графік http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image016.png на 3 одиниці вгору вздовж осі http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image020.png.

Побудуємо графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/614_src/614_image012.png

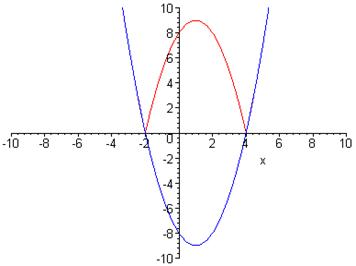


***Приклад 2.*** Побудувати графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image001.png.

Розв’язання:

Будуємо спочатку графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image003.png. Для цього використовуємо спосіб виділення повного квадрата квадратного тричлена: http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image005.pnghttp://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image006.png. Далі шляхом елементарних перетворень будуємо спочатку графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image008.png, потім http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image010.png, а потім http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image012.png.

Для того, щоб побудувати графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image001.png, потрібно залишити без змін ту частину графіка http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image012.png, яка знаходиться над віссю 0х, а ту, що нижче, симетрично відобразити на верхню півплощину.



***Приклад 3.*** Побудувати графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image016.png.

Розв’язання

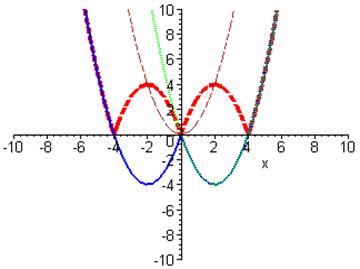
Шляхом елементарних перетворень будуємо графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image018.png:

1. http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image008.png (даний графік будуємо по основних точках).

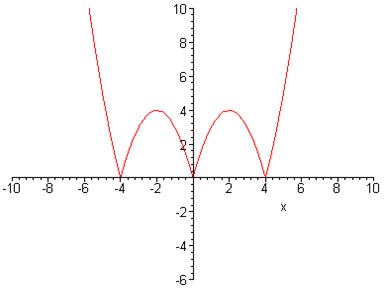
2. http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image019.png (http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image021.png).

3. http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image023.png (відкидаємо ту частину графіка http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image025.png, яка у лівій півплощині відносно осі 0y, а ту, що у правій, залишаємо і симетрично відображаємо на ліву півплощину).

4. http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image027.png (ту частину графіка http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image023.png, яка вище осі 0х, залишаємо без змін, а ту, що нижче, симетрично відображаємо на верхню півплощину).



Побудуємо той же графік без допоміжних графіків функцій:



Відмітимо, що графіки функцій, які містять модуль, можна будувати також, використовуючи означення модуля, як ми це робили у рівняннях та нерівностях з модулями.

***Приклад 4****.* Побудувати графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image032.png.

Розв’язання

Прирівнюємо до нуля вирази, що знаходяться під знаком модуля: http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image034.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image036.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image038.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image040.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image042.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image043.png. Використовуючи означення модуля, маємо:

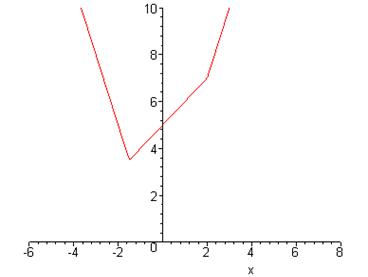
при http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image045.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image047.png;

при http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image049.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image051.png;

при http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image053.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image055.png.

Будуємо графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image032.png в системі Maple:

> **plot(abs(x-2)+abs(2\*x+3),x=-6..8,0..10);**



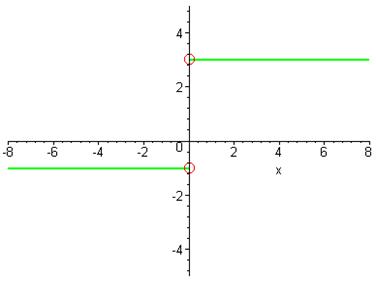
***Приклад 5.*** Побудувати графік функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image059.png.

Розв’язання

http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image061.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image063.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image065.png. Оскільки дана функція містить два модулі з однаковими підмодулевими виразами *х*, то розглянемо випадки, коли підмодулевий вираз додатний та від’ємний (випадок, коли підмодулевий вираз дорівнює нулю, не розглядаємо згідно з областю визначення функції).

При http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image067.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image069.png;

при http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image071.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image073.png. Отже, графіком функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/muh_2/617_src/617_image059.png є два промені:



***Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень***

***( №12)***

Завдання

Побудувати графіки вказаних функцій:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| варіант | Рівень А ( 2 бал.) | Рівень В ( 3бал.) | Рівень С (4 бал.) |
| 1 |  |  |  |
| 2 |  |  |  |
| 3 |  |  |  |
| 4 |  |  |  |
| 5 |  |  |  |
| 6 |  |  |  |
| 7 |  |  |  |
| 8 |  |  |  |
| 9 |  |  |  |
| 10 |  |  |  |

***Побудова* графіків *функцій, які містять знак абсолютної величини (побудова кусково-монотонної функції).***

Завдання

Побудувати графіки функцій:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Варіант | функція | функція |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***8*** |  | ***-*** |

Тема: Границя функції

**Завдання 1.** Знайти границі функцій, не користуючись правилами Лопіталя.

1. а)  б) 

в)  г) 

д) 

2. а)  б) 

в)  г)  д) ;

3. а)  б) 

в)  г) 

д) 

4. а)  б) 

в)  г) 

д) 

5. а)  б) 

в)  г) 

д) 

6. а)  б) 

в)  г)  д) 

7. а)  б) 

в)  г) 

д) 

8. а)  б) 

в)  г) 

д) 

9. а)  б) 

в)  г) 

д) 

10. а)  б) 

в)  г) 

д) 

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***9*** |  | ***14, 15*** |

Тема: Знаходження похідних функцій, що відрізняються від елементарних. Застосування правил диференціювання функцій. Знаходження похідних складених функцій.

**Завдання**

Практична робота №14 ( вироблення навичок знаходження похідних функцій, що відрізняються від елементарних та знаходження похідних складених функцій).

***Завдання 1.***Знайти похідні функцій.

1. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1718.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1719.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1720.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1721.png ; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1724.png

2. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1728.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1729.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1731.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1732.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1734.png;

3. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1738.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1739.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1740.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1741.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1742.png;

4. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1748.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1749.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1750.png ; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1752.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1754.png.

5. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1758.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1759.png;  http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1762.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1764.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1765.png.

6. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1768.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1769.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1770.png;  http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1774.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1775.png.

7. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1777.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1778.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1779.png;  http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1783.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1784.png.

8. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1787.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1788.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1789.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1790.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1794.png.

9. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1797.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1799.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1800.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1801.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1803.png.

10. http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1807.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1808.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1809.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1810.png; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page18_files/image1811.png

Практична робота №15 ( гр. – М )

**Завдання 1** . Знайти похідні функцій:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 варіант | 2 варіант | 3 варіант | 4 варіант |
|  |  |  |  |

( Практична робота №9 гр.- К)

**Завдання 2**. Знайти похідні  даних функцій.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

***Практична робота №***

***Тема :*** Застосування диференціала до наближених обчислень

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***10*** | ***-*** | ***-*** |

*Довідкова інформація:*  **Диференціал функції**

Нехай функція     має в даній точці  скінченну похідну . Тоді http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1566.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1567.png, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image622.png. Звідки

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1568.png.

Якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png  нескінченно малий приріст, то доданок http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1569.png є нескінченно малим вищого порядку, ніж доданок    і якщо  , то   і  нескінченно малі одного порядку.

**Означення 1.** Якщо функція  y    має похідну   в точці  , то вираз    називається *диференціалом* функції в цій точці і позначається символом . Тобто,

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1574.png.                    (1)

***Зауваження.*** Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1576.png

 Для будь-якої диференційовної в точці *х* функції  формулу (1) можна записати так:

Звідки отримаємо, що

тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

***Правила знаходження диференціала***

 1) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1579.png. 2) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1580.png. 3) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1582.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1583.png.

***Зауваження.*** http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1581.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1466.png.

***Приклад 1.*** Знайти диференціал функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1588.png.

***Розв’язання*** Знаходимо похідну від заданої функції:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1589.png

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1590.png;

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1591.png.

***Застосування диференціала в наближених обчисленнях***

З означення похідної функції в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1564.png випливає, що її приріст http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1405.png можна подати у вигляді: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1568.png, де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1567.png, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image622.png.

Отже, при малих http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1401.png має місце наближена рівність:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1604.png, тобто http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1605.png.

Звідки

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1606.png.                (2)

Формула (2) дозволяє знаходити значення функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image036.png в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1607.png, якщо відомі значення http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1608.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1445.png, з точністю http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1609.png

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1610.png,

де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1611.png.

***Приклад 2.*** Наближено обчислити значення http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1612.png.

***Розв’язання.*** В даному випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1613.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1614.png. Покладемо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1615.png, що відповідає  в градусній мірі;

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1617.png.

За формулою (2) , отримаємо:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1618.png, тобто http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1619.png.

***Приклад 3.*** Наближено обчислити значення http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1624.png.

***Розв’язання.*** В даному випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1625.png.

Нехай , ,тоді

За формулою (2), отримаємо:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page16_files/image1630.png.

**Завдання 1.**

Знайти диференціали функцій:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1 варіант | 2 варіант | 3 варіант | 4 варіант |
|  |  |  |  |
| 5 варіант | 6 варіант | 7 варіант | 8 варіант |
|  |  |  |  |
| 9 варіант | 10 варіант | 11 варіант | 12 варіант |
|  |  |  |  |

**Завдання 2.** Знайти наближені значення функцій:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| варіант | функції | функції | варіант | функції | функції |
| 1 |  |  | 7 |  |  |
| 2 |  | 0 | 8 |  |  |
| 3 |  |  | 9 |  |  |
| 4 |  |  | 10 |  |  |
| 5 |  |  | 11 |  |  |
| 6 |  |  | 12 |  |  |

***Практична робота №***

**Тема Застосування правил Лопіталя для розкриття невизначеностей**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***11*** | ***-*** | ***-*** |

**Теорема 1.**(І правило Лопіталя). Якщо:

1) функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image276.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2288.png диференційовні на інтервалі , http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2209.pnghttp://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2289.png для всіх http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2305.png;

2) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2306.png;

3) існує скінченна або нескінченна границя http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2307.png,

то існує границя http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2308.png, причому має місце рівність:

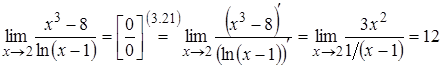
http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2309.png.                              (1)

***Запам’ятай добре!* *Доведену теорему зазвичай називають правилом Лопіталя розкриття невизначеності  за умови http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image283.png.***

Аналогічні теореми мають місце для розкриття невизначеності  у випадку односторонніх границь при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image370.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2319.png.

***Приклад 1.*** Обчислити границю  http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2320.png.

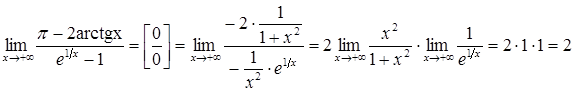
***Розв’язання.***  Маємо невизначеність типу . Функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2321.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2322.png задовольняють умови теореми в деякому околі точки http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2323.png. Застосуємо правило Лопіталя:

.

***Наслідок 1.*** Теорема Лопіталя справедлива також при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2325.png, при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2326.png і при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2327.png.

***Приклад 2.*** Обчислити границю http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2328.png.

***Розв’язання.*** Маємо невизначеність типу  . Застосуємо правило Лопіталя:

.

***Наслідок 2.*** Якщо похідні http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image1663.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2330.png задовольняють ті самі вимоги, що і функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image276.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2288.png, то правило Лопіталя можна застосувати повторно. При цьому отримаємо

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2331.png.                       (2)

І взагалі, правило Лопіталя при виконанні умов теореми можна застосовувати багаторазово.

***Приклад 3.***  Обчислити границю http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2332.png.

***Розв’язання.*** Дана границя дозволяє використовувати формулу (3.21) багаторазово, дійсно:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2333.png.

***Наслідок 3*.**Якщо в теоремі замінити умову 2) на наведену нижче

2) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2334.png, або http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2335.png, то формула (1) також має місце.

В цьому випадку правило Лопіталя застосовується для розкриття невизначеності типу

( ІІ правило Лопіталя).

***Приклад 4.*** Якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2337.png, то

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2338.png,

тобто довільний додатний степінь *x* зростає швидше, ніж http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image366.png при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image373.png.

***Розв’язування.*** Дійсно, застосувавши ІІ правило Лопіталя, отримаємо

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2339.png.

***Приклад 5.*** Якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2340.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2341.png то http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2342.png

тобто, при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image373.png степенева функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2343.png зростає повільніше, ніж показникова функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2344.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2341.png.

***Розв’язування.*** Дійсно, застосувавши правило Лопіталя розкриття невизначеності  *n* раз, отримаємо:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2345.png.

Зазначимо, що формули (1), (2) мають місце лише тоді, коли існує скінченна або нескінченна границя http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2346.png. Але буває і так, що границя http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2347.png існує, у випадку коли границя http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2346.png не існує.

***Приклад 6.*** http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2348.png існує і дорівнює http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image177.png.

***Розв’язання.*** Дійсно

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2349.png.

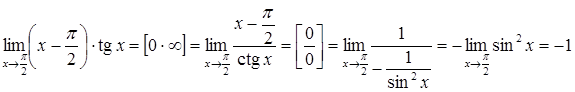
Але відношення похідних http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2350.png не має границі при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2351.png.

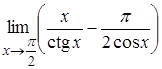
Після певних перетворень правило Лопіталя може бути застосовано також до розкриття інших невизначеностей, таких як: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2352.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2353.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2354.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image589.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2355.png.

Так, границі невизначеностей типів http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2352.png та http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2355.png доцільно звести до виду http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2318.png або http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2336.png.

***Приклад 7.*** Обчислити границю http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2356.png.

***Розв’язання.*** Маємо невизначеність типу http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2352.png. Приведемо цю невизначеність до виду http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2318.png і застосуємо правило Лопіталя.

.

***Приклад 8.*** Обчислити границю .

***Розв’язання.*** Маємо невизначеність типу http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2355.png. Спочатку зведемо дроби до спільного знаменника.

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2359.png.

 Внаслідок перетворень ми дістали невизначеність виду . Застосуємо правило Лопіталя

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2360.png.

При розкритті невизначеностей типу http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2353.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2354.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image589.png за допомогою правила Лопіталя попередньо необхідно виконати деякі перетворення.

Нехай треба обчислити границю складеної степенево - показникової функції:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2361.png,

де ми маємо невизначеність одного з вищезгаданих типів. Запишемо цю границю у вигляді

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2362.png,

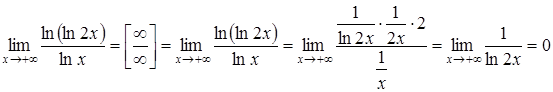
тут в показнику маємо вже невизначеність виду , яку можна звести до невизначеності типу або шляхом знесення в знаменник одного із співмножників, що стоять під знаком границі.

***Приклад 9.*** Обчислити границю http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2364.png.

***Розв’язання.*** Маємо невизначеність типу http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2365.png. Виконаємо тотожне перетворення функції:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2366.png.

Знайдемо границю показника отриманої функції за правилом Лопіталя

.

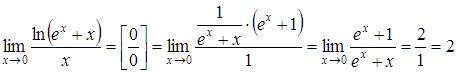
Отже, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2368.png.

***Приклад 10.*** Обчислити границю http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2369.png.

***Розв’язання.*** Маємо невизначеність типу http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2370.png. Виконаємо тотожне перетворення функції, що стоїть під знаком границі:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2371.png.

Обчислимо окремо границю, яка міститься в показнику, за правилом Лопіталя

.

Отже,

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page20_files/image2373.png.

**Завдання**

Знайти границі функцій, використовуючи правила Лопіталя.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **варіант 1** | **варіант 2** | **варіант 3** | **варіант 4** | **варіант 5** |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***-*** | ***-*** | ***16*** |

Тема: Дослідження функції на монотонність та екстремум.

*Схема дослідження функції на монотонність*

*1.*     З’ясовують область визначення заданої функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2388.png.

*2.*     Шукають першу похідну функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2388.png.

*3.*     Прирівнюють першу похідну до нуля і знаходять корені рівняння http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2389.png та точки, в яких похідна не існує.

*4.*     Наносять одержані розв’язки рівняння http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2389.png (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоті» точки), на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.

*5.*     Досліджують знак похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з’ясовують знак похідної в цій точці.

*6.*     За одержаними результатами формують відповідь.

***Приклад 1.*** Дослідити функцію http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2390.png на монотонність.

***Розв’язання.*** Областю визначення даної функції є множина дійсних чисел. Обчислимо похідну даної функції: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2391.png. Зрозуміло, що похідна дорівнює нулю при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2392.png. За методом інтервалів знайдемо проміжки знакосталості http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image1555.png.

 На проміжках http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2393.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2394.png, тому дана функція тут зростає. На проміжку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2395.png http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2396.png, тому функція спадає на цьому проміжку.

**Теорема 1.**(*достатня умова екстремуму*). Якщо при переході значень аргументу *x* функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image276.png через критичну точку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image1564.png її похідна змінює знак, то критична точка є точкою локального екстремуму, причому:

а) при зміні знака з „плюса” на „мінус” точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image1564.png є точкою локального максимуму;

б) при зміні знака з „мінуса” на „плюс” – точкою локального мінімуму.

**Завдання**

Дослідити функцію на монотонність та екстремум:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| варіант | функція | варіант | функція |
| 1 |  | 6 |  |
| 2 |  | 7 |  |
| 3 |  | 8 |  |
| 4 |  | 9 |  |
| 5 |  | 10 |  |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***12*** |  | ***17*** |

Тема: Дослідження функції для побудови графіка.

*Схема дослідження функції на проміжки вгнутості та опуклості*

1.     З’ясовують область визначення заданої функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2388.png.

2.     Шукають другу похідну функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2388.png.

3.     Прирівнюють другу похідну до нуля і знаходять корені рівняння http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2464.png та точки, в яких похідна не існує.

4.     Наносять одержані розв’язки рівняння http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2464.png (зафарбовані точки) та точки, в яких похідна не існує («виколоті» точки), на числову вісь. Ці точки розбивають числову вісь на числові проміжки.

5.     Досліджують знак другої похідної на кожному числовому проміжку. З цією метою з кожного проміжку вибирають довільне значення (точку) та з’ясовують знак другої похідної в цій точці.

6.     За одержаними результатами формуємо відповідь.

***Приклад 1.*** Для графіка функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2465.png знайти точки перегину і проміжки опуклості та вгнутості.

***Розв’язання.***

1) Областю визначення функції є множина дійсних чисел.

2) Знаходимо другу похідну:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2466.png.

3) Зрозуміло, що .

4) Досліджуємо знаки другої похідної ліворуч і праворуч від точки . Якщо , то http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2470.png і крива – опукла; якщо  то y′′ і крива – вгнута.

5) Отже, точка з абсцисою  є точкою перегину, ордината точки перегину , тобто  - точка перегину.

На проміжку  крива – опукла, а на проміжку  - угнута.

***Асимптоти графіка функції***

**Означення 1.** Пряма http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2477.png називається *похилою асимптотою*  графіка функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image036.png, якщо при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image373.png (http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image372.png) справедлива рівність

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2478.png,

де http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2479.png при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image373.png (http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image372.png).

Геометрично (рис. 1) рівність (3.23) означає, що графік http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image036.png як завгодно близько наближається до графіка  при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image373.png (http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image372.png)

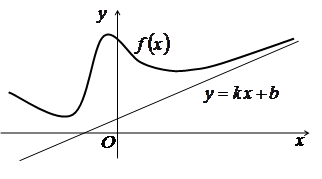
******

Рис. 1.

З означення 3.11 (формула (3.23)) випливає, що невідомі коефіцієнти *k* і *b* в рівнянні http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2477.png можна знайти так (розглянемо випадок http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image373.png):

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2481.png,

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2482.png.

Формули, аналогічні (3.24), (3.25), мають місце і у випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image372.png.

***Приклад 2.*** Знайти похилу асимптоту для функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2483.png.

***Розв’язання.*** Рівняння асимптоти шукатимемо у вигляді http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2477.png. Знаходимо невідомі коефіцієнти за формулами (3.24), (3.25)

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2484.png,

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2485.png.

Отже, пряма  є похилою асимптотою як при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image373.png, так і при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image372.png.

**Означення2.** Пряма http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image282.png називається *вертикальною асимптотою*  графіка функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image036.png, якщо справедлива хоча б одна рівність

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2487.png або http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2488.png.

Відмітимо, що пряма http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image282.png є вертикальною асимптотою для функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image036.png тоді і тільки тоді, коли точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2489.png є точкою розриву другого роду (випадок, коли хоча б одна з односторонніх границь нескінченна) для функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image036.png.

Отже, задача знаходження вертикальних асимптот еквівалентна задачі відшукання точок розриву другого роду типу „*нескінченний стрибок*” (infinite discontinuity).

***Приклад 3.*** Знайти вертикальні асимптоти функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2490.png.

***Розв’язання.*** Областю визначення даної функції є множина всіх дійсних чисел, за винятком точок http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image531.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image698.png. Отже, точками розриву можуть бути лише ці дві точки. Досліджуючи на розрив, впевнюємось, що http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image531.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image698.png - точки розриву другого роду типу „нескінченний стрибок”.

Отже прямі http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image531.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image698.png - вертикальні асимптоти.

***Загальна схема дослідження функції***

Наведемо схему, за якою доцільно досліджувати графік функції.

1) Знайти область визначення, перевірити функцію на парність, непарність, періодичність.

2) Визначити область неперервності та точки розриву.

3) Знайти асимптоти графіка функції.

4) Знайти критичні точки першого роду, визначити проміжки зростання і спадання функції, знайти точки локального екстремуму.

5) Знайти точки перегину, проміжки опуклості і вгнутості.

6) Знайти точки перетину графіка з віссю ординат; точки перетину з віссю абсцис (якщо це можливо); інші контрольні точки.

7) За одержаними результатами побудувати  ескіз графіка функції.

***Приклад 4.*** Дослідити функцію http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2491.png та побудувати її графік.

***Розв’язання.***

1) Функція визначена для всіх http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2492.png. Функція загального виду, оскільки http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2493.png. Функція не є періодичною.

2) В точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image698.png функція має розрив.

Оскільки http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2494.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2495.png, то точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image698.png є точкою розриву другого роду типу „нескінченний стрибок”.

3,а) Враховуючи дослідження пункту 2), робимо висновок, що пряма http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image698.png є вертикальною асимптотою.

3,б) Шукаємо похилі асимптоти у вигляді . Тут

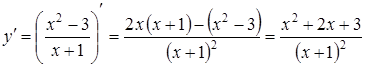
,  відповідають випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image372.png, а ,  - випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image373.png. Знайдемо невідомі ,   та ,

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2503.png,

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2504.png.

Отже,  одна і та ж сама похила асимптота як при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image373.png, так і при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image372.png.

4) Для визначення інтервалів монотонності та локальних екстремумів обчислимо спочатку похідну

.

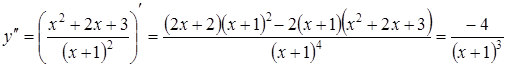
 Знайдемо проміжки знакосталості для .

Рівняння  дійсних коренів не має, причому

 . Врахувавши те, що знаменник , робимо висновок, що  на кожному з проміжків неперервності. Отже дана функція зростає при  і при  . Точок локального екстремуму немає.

5) Знайдемо проміжки опуклості (вгнутості).

Для цього обчислимо спочатку :

.

|  |  |
| --- | --- |
| http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2513.png  Рис.2 | Знайдемо проміжки знакосталості для http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image1696.png. За методом інтервалів отримуємо, що http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2472.png при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2510.png - тут графік функції вгнутий, та http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2470.png при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2511.png - тут графік функції опуклий. В самій точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image698.png функція невизначена, тому точки перегину немає.  6) Знайдемо точки перетину графіка з координатними осями.  Графік функції перетинає вісь абсцис, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2514.png, отже, маємо точки: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2515.png. Графік перетинає вісь ординат, якщо http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2516.png, маємо точку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2517.png. |

7) У відповідності з проведеним дослідженням будуємо ескіз графіка даної функції (див. рис. 2).

***Приклад 5.*** Дослідити функцію http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2547.png та побудувати її графік.

***Розв’язання.***

1) Функція визначена для всіх http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2548.png. Функція не є парною, оскільки http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2519.png; не є непарною, оскільки http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2520.png. Функція не є періодичною.

2) Функція неперервна на кожному з інтервалів http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2549.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2550.png. В точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image576.png функція має розрив.

Оскільки

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2551.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2552.png,

то точка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image698.png є точкою розриву другого роду типу „нескінченний стрибок”.

3,а) Враховуючи пункт 2), робимо висновок, що пряма http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image576.png є вертикальною асимптотою.

3,б) Шукаємо похилі асимптоти у вигляді http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2496.png. Тут http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2497.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2498.png відповідають випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image372.png, а http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2499.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2500.png - випадку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image373.png. Знайдемо невідомі коефіцієнти http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2501.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2502.png .

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2553.png;

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2554.png

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2555.png.

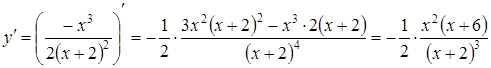
Отже, пряма http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2556.png є похилою асимптотою як при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image373.png, так і при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image372.png.

Знайдемо точку перетину графіка (якщо це можливо) з похилою асимптотою:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2557.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2558.png.

Маємо точку перетину .

4) Визначимо інтервали монотонності та точки локального екстремуму. Спочатку обчислимо похідну

.

Знайдемо проміжки знакосталості для y′ за методом інтервалів.

Рівняння http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2561.png має корені http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image328.png та http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2562.png (критичні точки першого роду). Похідна не існує в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image576.png, але оскільки ця точка не належить області визначення, то вона не є критичною (у ній не може бути екстремуму).

За методом інтервалів складаємо таблицю зміни знаків похідної

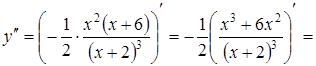
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2563.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2564.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2565.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2566.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2567.png | 0 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2568.png |
| http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image1532.png | - | 0 | + | не існує | - | 0 | - |
| *y* | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2569.png | min  6,75 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2570.png | не існує | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2571.png |  | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2572.png |

 У точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2562.png функція має локальний мінімум, оскільки при переході значень аргументу через неї похідна змінює знак з „-” на „+”, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2573.png.

У точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image328.png функція не має локального екстремуму.

5) Визначимо інтервали опуклості (вгнутості) і точки перегину.

Для цього обчислимо спочатку другу похідну http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image1696.png:



http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2575.png.

Знайдемо проміжки знакосталості для http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image1696.png.

Похідна дорівнює нулю при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image328.png (критична точка другого роду) і не існує при http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image576.png (проте http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image576.png не є критичною точкою, тому що функція в ній не існує).

За методом інтервалів складаємо таблицю зміни знаків похідної

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2576.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2566.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2577.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2578.png | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2568.png |
| http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image1696.png | + | не існує | + | 0 | - |
| *y* | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2579.png | не існує | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2580.png | перегин | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2581.png |

При  та   , тому на цих інтервалах графік функції вгнутий; при     - графік опуклий.

Оскільки при переході значень аргументу через точку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image328.png друга похідна змінює знак, то http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image328.png є точкою перегину; http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2583.png. Отже, перегин http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2584.png.

6) Точка перетину графіка з віссю абсцис (ординат) http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page22_files/image2584.png вже знайдена.

7) За результатами дослідження будуємо ескіз графіка даної функції (рис. 3).

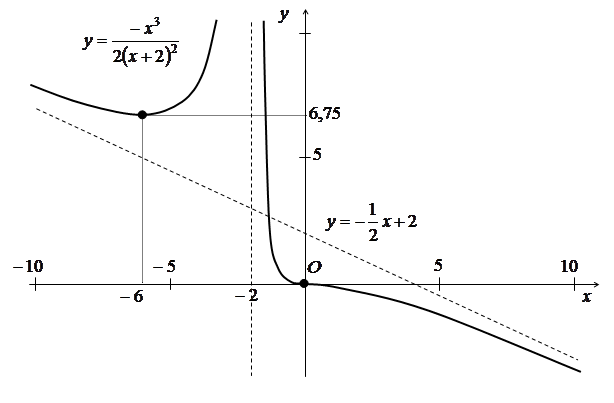


Рис. 3.

**Завдання**

Дослідити функцію та побудувати її графік

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| варіант | функція | варіант | функція | варіант | функція |
| 1 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2694.png | 11 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2733.png | 21 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2769.png |
| 2 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2698.png | 12 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2736.png | 22 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2744.png |
| 3 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2702.png | 13 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2740.png | 23 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2775.png |
| 4 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2706.png | 14 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2744.png | 24 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2777.png |
| 5 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2710.png | 15 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2748.png | 25 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2780.png |
| 6 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2714.png | 16 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2751.png | 26 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2783.png |
| 7 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2718.png | 17 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2755.png | 27 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2787.png |
| 8 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2722.png | 18 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2759.png | 28 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2790.png |
| 9 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2726.png | 19 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2762.png | 29 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2793.png |
| 10 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2729.png | 20 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2765.png | 30 | http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page26_files/image2796.png |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
|  |  | ***18*** |

Тема:  Найбільше і найменше значення функції на відрізку

Розглянемо функцію http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image276.png, що є визначеною і неперервною на відрізку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2221.png. Поставимо тепер задачу про відшукання *глобального максимуму і глобального мінімуму* або, іншими словами, відшуканню найбільшого і найменшого значень http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image276.png на відрізку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2221.png. Зазначимо, що неперервна функція, в силу другої теореми Веєрштрасса, обов’язково досягне в деякій точці відрізка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2221.png свого найбільшого (найменшого) значення.

Найбільше (найменше) значення функція http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image276.png може приймати або у внутрішній точці відрізка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2221.png (тоді воно збігається з одним із локальних екстремумів функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image276.png), або на одному з кінців даного відрізка.

Звідси зрозуміло, що для знаходження найбільшого *М* і найменшого *m* значень неперервної функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image276.png на відрізку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2221.png потрібно:

1) знайти критичні точки, які належать відрізку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2221.png;

2) обчислити значення функції в цих критичних точках і в точках *a* і *b*;

3) з усіх отриманих значень вибрати найбільше *М* і найменше *m* і відмітити точки, в яких ці значення досягаються.

Скорочено записують так: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2415.png. Читають – найбільше значення (глобальний максимум) функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image276.png на відрізку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2221.png дорівнює *М* і досягається в точці http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2416.png. Аналогічно http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2417.png.

***Приклад 1.*** Знайти найбільше і найменше значення функції http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2418.png на відрізку http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2419.png.

***Розв’язування.*** Знаходимо похідну:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2420.png.

Прирівнюємо її до нуля:

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2421.png.

Розв’язавши це рівняння отримаємо критичні точки: http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2422.png, причому http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2423.png. Обчислимо значення функції в критичних точках http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2424.png і http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2425.png, а також на кінцях відрізка http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2426.png.

http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2427.png.

Отже http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2428.png, http://posibnyky.vntu.edu.ua/m_a/page21_files/image2429.png.

У випадку, коли неперервна функція має на відрізку лише одну точку локального максимуму (мінімуму), то це і є точка глобального максимуму (мінімуму).

**Завдання**

Знайти найбільше і найменше значення функції на зазначеному інтервалі:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| варіант | функція | інтервал |
| 1 |  |  |
| 2 |  |  |
| 3 |  |  |
| 4 |  |  |
| 5 |  |  |
| 6 |  |  |
| 7 |  |  |
| 8 |  |  |
| 9 |  |  |
| 10 |  |  |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***-*** | ***-*** | ***20*** |

Тема:Невизначений інтеграл та його властивості

**Завдання.** Знайти невизначені інтеграли:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| варіант 1 | варіант 2 | варіант 3 | варіант 4 | варіант 5 |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***16*** | ***-*** | ***21*** |

**Тема:**Обчислення визначених інтегралів.

**Завдання.** Обчислити визначені інтеграли:

**1.a) ; б) ; в)**

**2. а); б) ; в)**

**3. а); б) ; в)**

**4. ; ; в)**

**5.; . В)**

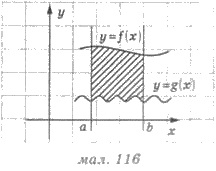
***Практична робота №***

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***к*** | ***б*** | ***м*** |
| ***17*** | ***-*** | ***22*** |

**Тема:**Застосування визначеньшо інтегралу для обчислення площ фігур, обмежених лініями.

 Розглянемо площу фігур зверху обмежену графіком функцій у = /(х), знизу - графіком функції у = f(х) та вертикальними прямими х = а і х = b, причому функції у = f(x) і у = g(х) - неперервні на [а;b] і для всіх значень х http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image013.gif [а;b] виконується нерівність f(x) ≥ g(x) (мал. 116). Тоді площу S такої плоскої фігури можна знайти за формулою:

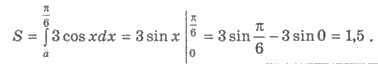
http://subject.com.ua/mathematics/zno/zno.files/image1781.jpg

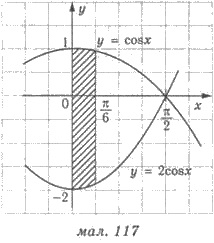


 Приклад 1. Знайдіть площу фігур, обмежену графіками функцій у = соs х, у = -2 соs х та прямими x = 0 i x = π/6.

Розв’язання (мал. 117). Маємо

Підінтегральний вираз можна спростити. Отримаємо

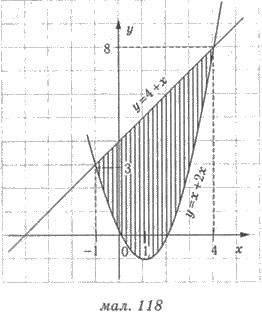




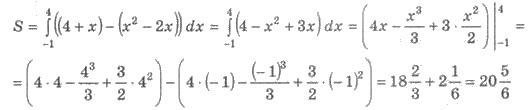
Приклад 2. Знайдіть площу фігури, обмежену графіками функцій у = х2 - 2х і у = 4х + х.

Розв’язання. Знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій: х2 - 2х = 4 + х; х2 - 3х - 4 = 0; x1 = -1; x2 = 4.

Ординати точок перетину y1 = 3; у2 = 8. Зображуємо графіки функцій схематично (мал. 118).



Шукана площа



**10. Завдання.** Обчислити площі областей, обмежених заданими лініями:

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

**10. **

11.

12.

13.

14.

ЛІТЕРАТУРА

1.     Вища математика. Основні означення, приклади, задачі. / За ред.

Г. Л. Кулініча – К., 1992.

2.     Дубовик В. П., Юрик І.І. Виша математика: Навчальний посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.

3.     Дубовик В. П. Вища математика : збірник задач. / В. П. Дубовик,

І. І. Юрик. – К. : Видавництво А.С.К., 2003.

4.     Збірник задач з вищої математики / За ред. Ф. С. Гудименка. – К. : Вид-во Київ. ун-ту, 1967. – 352 с.

5.     Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа.

/ Кудрявцев Л. Д. – М. : Наука, 1989.

6.     Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике /типовые расчеты/ / Кузнецов Л. А. – М. : Высш. шк., 1983.

7.     Математичний аналіз у задачах і прикладах. У 2 ч. : навч. посібник

/ Дюженкова Л. І., Лященко М. Я. та ін. – К. : Вища школа, 2003. – Ч.1.

8.     Овчинников П. Ф. Высшая математика. / Овчинников П. Ф.,

Яремчук Ф. П., Михайленко В.М. – К. : Вища школа, 1987.

9.     Пак В. В. Вища математика. / В. В. Пак, Ю. Л. Носенко. – К. : Либідь, 1996.

10.                    Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Ч. 1. / Пискунов Н. С. – М. : Наука, 1985.

11.                    Сборник задач по математике для втузов. Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа. / Под ред. А. В. Ефимова и

Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 1986.

12.                    Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. / Под ред. А. П. Рябушко. – Минск : Вышэйш. шк., 1990.

**2. ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ “ВИЩА МАТЕМАТИКА”**

**(2 семестр)**

**визначений та невласний інтеграли**

1. Означення визначеного інтеграла, його геометричний і фізичний зміст, умови існування. Обчислення визначених інтегралів за формулою Ньютона – Лейбніця. Заміна змінної і інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Обчислення площі плоскої фігури.

2. Невласні інтеграли першого роду (з нескінченними межами інтегру­вання)

та невласні інтеграли другого роду (від функцій, необмежених на скінченому проміжку).

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

1. Задачі, що приводять до звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Основні поняття і означення.

2. Диференціальні рівняння першого порядку: з відокремлюваними змінними, однорідні, лінійні.

3. Диференціальні рівняння другого порядку: лінійні однорідні та лінійні неоднорідні (зі спеціальною правою частиною) зі сталими коефіцієнтами.

**ЧИСЛОВІ РЯДИ**

1. Числові ряди: основні поняття і означення. Необхідна умова збіжності. Основні властивості збіжних рядів. Дослідження збіжності числових рядів з додатними членами.

2. Достатні умови (ознаки) збіжності додатних числових рядів:ознака порівняння, ознака Даламбера, радикальна ознака Коші.

3. Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніця.

**ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ**

**ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ**

Формула Ньютона - Лейбніця для обчислення визначених інтегралів

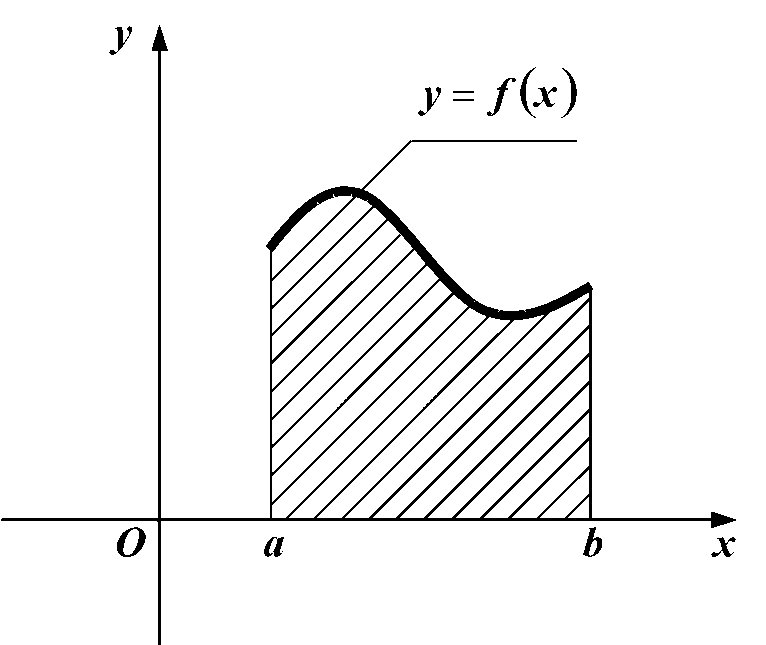
.

Спосіб підстановки у визначених інтегралах

****.

Спосіб інтегрування за частинами у визначених інтегралах

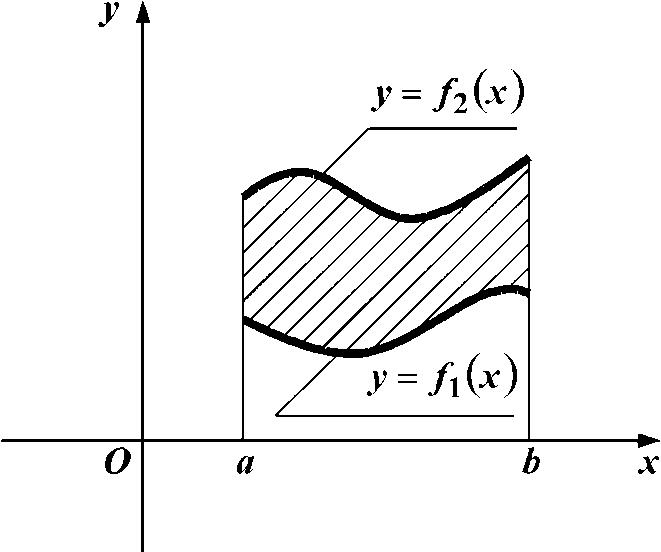
.

**Обчислення площі плоскої фігури.**

а) криволінійна трапеція:

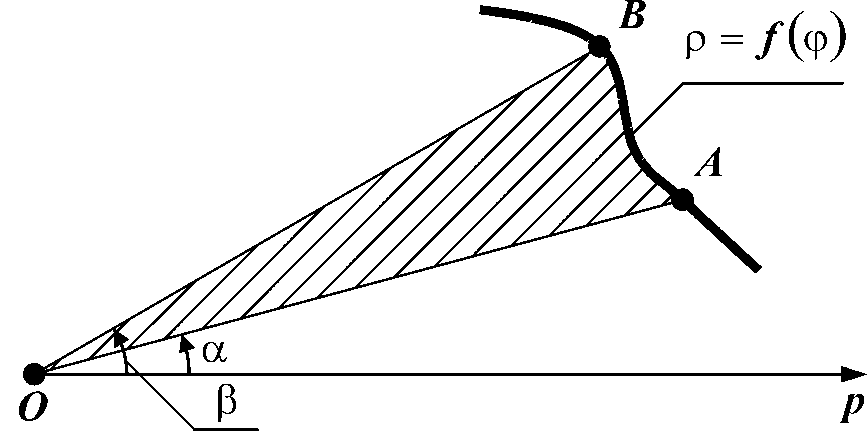
,

.



б) криволінійний сектор:

,



**Невласні інтеграли з нескінченними границями**

*а) невласні інтеграли з нескінченними границями*

.

.

, де –довільне значення,  – всюди неперервна функція.

Якщо границя такого інтегралу є кінцевою, то такий інтеграл називається збіжним; у разі, коли інтеграл прямує до , його називають розбіжним.

*б) невласні інтеграли від розривних функцій*

,

де – точка розриву функції, де

.

.

**ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ**

*Диференціальним рівнянням* (надалі, Д.Р.) називається рівняння, що містить похідні або диференціали невідомої функції. Найбільший порядок похідних називається *порядком* диференціального рівняння.

Д.Р. вигляду ***N1(y)M1(x)dx+M2(x)N2(y)dy=0***  називаються *Д.Р. з відокремленими змінними.*

Д.Р. називається *однорідним*, якщо його можна подати у вигляді:.

Воно за допомогою заміни змінної  ⇒ зводиться до Д.Р. з відокремлюваними змінними.

Д.Р. виду ***y’+P(x)y=Q(x)*** називається *лінійним* Д.Р. Його розв’язок розшукується у вигляді .

***Приклад 1.***  Розв’язати задачу Коші (знайти загальний розв’язок диференційного рівняння і частинний розв’язок при заданих початкових умовах):

, .

*Розв’язання.* Запишемо рівняння у диференціалах:

.

Дане рівняння є рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними (тобто може бути зведене до вигляду, коли з одного боку знака рівності присутня тільки залежна змінна ***y***, а з іншого – тільки незалежна змінна ***x,*** таку рівність можна про інтегрувати і отримати загальний інтеграл рівняння).

Виконаємо відокремлення змінних, для чого домножимо рівняння на , в результаті отримаємо рівняння з відокремленими змінними

.

Проінтегруємо отримане рівняння:

,

і отримаємо

.

Це – загальний інтеграл рівняння у неявному вигляді. Звідси:

.

Частинний розв’язок знаходимо за допомогою початкової умови , підставляючи її о загального розв’язку:

; ***С=*2.**

Тоді частинним розв’язком диференційного рівняння є

**.**

***Приклад 2.***  Знайти частинний розв’язок диференційного рівняння при заданих початкових умовах

, .

*Розв’язання.* Дане рівняння є лінійним диференційним рівнянням першого порядку.

; ;

,



Накладемо на функцію ***v*** умову, щоб вираз у дужках дорівнював нулю, тобто

,

і знайдемо функцію ***v*** з отриманого диференційного рівняння.

 , 

Тепер функцію ***u*** знаходимо з рівняння



що утворюється в результаті підстановки ***v = x*** до початкового рівняння:





Оскільки ***y = uv***, то загальним розв’язком рівняння є



Константу інтегрування ***С*** знаходимо з початкової умови:

.

Отже, 

***Приклад 3.*** Розв’яжіть задачу: знайти криву, яка проходить через точку ***М(0;1),*** якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої  дорівнює .

*Розв’язання.*

Як відомо, . Тому потрібно розв’язати задачу Коші:

, .

, .

Отже, шукана крива .

Рівняння вигляду  називаються *лінійними однорідними Д.Р*. Його загальний розв’язок має вигляд , де  лінійно незалежні частинні розв’язки рівняння. Розшукуємо їх у вигляді , де - корені характеристичного рівняння .

*Розв’язок:*



**а)** ***D>0* б)** ***D=0***, ***= –b/2***

; ;

**в)** ***D<0***,  – комплексні числа. 

.

Рівняння вигляду  називається *лінійним неоднорідним* ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Для того, щоб знайти загальний розв’язок неоднорідного ДР, необхідно скористатися таким твердженням: загальний розв’язок такого ДР дорівнює сумі розв’язку відповідного однорідного ДР та якого-небудь частинного розв’язку неоднорідного ДР: , де  – загальний розв’язок відповідного однорідного ДР,  – частинний розв’язок неоднорідного ДР. Правила побудови  наведені у таблиці.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  | |
| степенева частина  відсутня |  | при  або  при |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| показникова функція  відсутня ( | показникова функція  відсутня |
| лише  лише  і , і | і , і |
| тригонометричні функції  відсутні ( | тригонометричні функції  відсутні |

***Приклад 1.***Розв’язати задачу Коші: , , .

*Розв’язання.* Дане рівняння є лінійним однорідним ДР 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами. Складемо характеристичне рівняння

.

Дискримінант . Отже, рівняння має один дійсний корінь  подвійної кратності. Тому загальний розв’язок ДР має вигляд

.

Для знаходження частинного розв’язку скористаємося початковими умовами. Для цього знайдемо :

.

 . Отже, ***.***

.

Отже, . Остаточно отримаємо .

***Приклад 2.*** Знайти загальний розв’язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

.

*Розв'язання.* . Відповідне лінійне однорідне , характеристичне рівняння , . Тоді загальний розв’язок лінійного однорідного ДР буде .

, . Так як  – корінь кратності , то ,

 , . . Звідси .

Тоді  – загальний розв’язок шуканого рівняння.

***Приклад 3****.* Вказати вигляд (без обчислень коефіцієнтів)частинний розв’язок ЛНДР  . .

*Розв'язання.* . , , ,  .

**ЧИСЛОВІ РЯДИ**

Нехай нескінченна послідовність чисел. Вираз  називається *числовим рядом*.

Ряд називається *збіжним,* якщо послідовність його часткових сум  , де , має кінцеву границю, тобто . Число  називається *сумою ряду.*

**Ознаки збіжності додатних числових рядів**

***Необхідна умова збіжності***

Якщо ряд збігається, то його загальний член  прямує до нуля при , тобто .

*Наслідок.* Якщо , то ряд розбігається.

***Ознака збіжності Даламбера***

Якщо , то  

# ***Гранична ознака порівняння***

Нехай є два ряди , .

Якщо , де , , то ці два ряди або одночасно збігаються, або одночасно розбігаються.

Такі ряди називають еквівалентними та позначають це так:

.

# ***Знакопочережні ряди***

Числовий ряд називається *знакопочережним*, якщо його члени, що стоять поруч, мають різні знаки.

Такі ряди мають вигляд:

, (1)

, (2)

де  абсолютна величина члена ряду.

# ***Ознака Лейбніця***

Якщо в знакопочережному ряді (2) члени такі, що

1) 

2) ,

то ряд збігається, а його сума за абсолютним значенням не перевершує перший член ряду.

Знакопочережний ряд називається *умовно збіжним,* якщо він збігається, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається.

Знакопочережний ряд називається *абсолютно збіжним,* якщо збігається ряд з абсолютних величин його членів.

**Елементи комбінаторики. Початки теорії ймовірностей**

*Перестановками* із *n елементів* називають такі впорядковані множини з n елементів, які різняться між собою порядком їх розміщення. Кількість таких упорядкованих множин обчислюється за формулою: 

*Розміщенням* із *n елементів по m*

(0 mn) називаються такі впорядковані множини, кожна із яких містить m елементів і які відрізняються між собою порядком розташування цих елементів або хоча б одним елементом: .

*Комбінаціями**(сполученнями )*з n елементів по m

(0 mn) називаються такі множини з m елементів, які різняться між собою хоча б одним елементом: .

*Випробування* — реальний або мислений експеримент (виконуваний за певної незмінної сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню.

*Подія* — результат випробування. Якщо в результаті випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається *достовірною.* Подія, яка в даному випробуванні не може відбутись, називається *неможливою.* Якщо в результаті випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається *випадковою*. Випадкові події позначаються літерами *A, B, C, D*, …

*Класичною ймовірністю випадкової події А* називається відношення кількості елементарних подій *m*, які сприяють появі цієї події (становлять множину її елементарних подій), до загальної кількості *n* рівноможливих елементарних подій, що утворюють простір елементарних подій Ω:

***P(A)= m /n***.

# **КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2**

Тема: Визначений та невласний інтеграли.

**Диференціальні рівняння. Числові ряди. Теорія ймовірностей.**

# ***Завдання до контрольної роботи № 2***

**1. Завдання.** Обчислити визначені інтеграли:

**1. ; 6. ;**

**2. ; 7. ;**

**3. ; 8. ;**

**4. ; 9. ;**

**5.; 10. .**

**2. Завдання.** Обчислити площі областей, обмежених заданими лініями:

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

**10. **

**3.Завдання.** Обчислити невласні інтеграли, або довести їх розбіжність:

**1.**  **; 6.  ;**

**2.**  **; 7.  ;**

**3.** **; 8. ;**

**4.** **; 9.  ;**

**5.** **; 10.  .**

**4. Завдання.** Дослідити на збіжність дані числові ряди:

**1. а); б) ;**

**2. а); б) ;**

**3. а) ; б) ;**

**4. а) ; б) ;**

**5. а) ; б) ;**

**6. а) ; б) ;**

**7. а) ; б) ;**

**8. а) ; б) ;**

**9. а) ; б) ;**

**10. а) ; б)  .**

**5. Завдання.** З’ясувати чи є даний ряд абсолютно збіжним, умовно збіжним, або розбіжним.

**1. ; 6. ;**

**2. ; 7. ;**

**3. ; 8. ;**

**4. ; 9. ;**

**5. ; 10. .**

**6. Завдання.** Розв’язати диференціальні рівняння першого порядку:

**1. а); б) ;**

**2. а) ; б) ;**

**3. а) ; б) ;**

**4. а) ; б) ;**

**5. а)  ; б);**

**6. а) ; б);**

**7. а) ; б) ;**

**8. а) ; б) ;**

**9. а) ; б) ;**

**10.** **а) ; б) .**

**7. Завдання.** Розв’яжіть задачу: знайти криву, що проходить через точку ***М(а;в),*** якщо кутовий коефіцієнт дотичної в будь-якій точці кривої дорівнює

**, коли .**

**1.  6. **

**2.  7. **

**3.  8. **

**4.  9. **

**5.  10. **

**8. Завдання.** Розв’язати задачу Коші для лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку:

**1. **

**2. **

**3. **

**4. **

**5. **

**6. **

**7. **

**8. **

**9. **

**10. .**

**9. Завдання.** Розв’яжіть лінійне неоднорідне рівняння зі спеціальною правою частиною:

**1.  6. **

**2.  7. **

**3.  8. **

**4.  9. **

**5.  10. .**

**10. Завдання.** Розв’яжіть задачу:

**1.** Студент знає 20 питань з 25 питань програми. Екзаменатор задає йому три питання. Знайти ймовірність того, що студент знає всі три питання.

**2.** Серед 100 електроламп 5 зіпсованих. Яка ймовірність того, що взяті навмання 3 лампи будуть справними?

**3.** Правління підприємства складається з дев`яти осіб. Скільки можна скласти варіантів обрання з їх числа трьох керівників: президента, директора та комерційного директора.

**4.** У малому підприємстві працюють чотири жінки та п`ять чоловіків. Випадковим способом дві особи запізнились. Знайти ймовірність того, що одна з цих осіб жінка, а друга - чоловік.

**5.** До профкому обрано семеро осіб, з яких потрібно обрати голову профкому та його заступника. Скількома способами це можливо зробити.

**6.** Студент забув останні три цифри потрібного телефону, але він пам`ятає, що всі три цифри є різні, тому вибирає їх навмання. Знайти ймовірність того, що набрані цифри вірні.

**7.** В урні п`ятнадцять червоних, дев`ять синіх та шість зелених куль однакового розміру. Навмання беруть шість куль. Яка ймовірність того, що будуть взяті одна зелена, дві сині та три червоні кулі.

**8.** Із колоди карт (32 карти) навмання взято одну. Яка ймовірність того, що це дама, якщо відомо, що взято карту червоної масті?

**9.** В урні 10 білих, 15 чорних, 20 блакитних та 25 червоних куль однакового розміру. Навмання взято одну кулю. Знайти ймовірність того, що ця куля буде біла або чорна.

**10.** У ящику перебувають 15 м'ячів, з яких 9 нових. Для тренування спортсмен навмання бере три м'ячі. Яка ймовірність того, що вони всі нові?

# **СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
3. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевников Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – М.: Наука, 2000, ч. 1,2.
4. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. – Київ, “А.С.К.”, 2005. – 648 с.
5. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика.
6. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред.   
   Б.П. Демидовича. – М.: Физматгиз, 1978.
7. Кагадій Л.П., Павленко А.В., Чуднов К.У. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Ч. 1,2: Конспект лекцій. – Дніпропетровськ, НМетАУ. – 2004.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980.
9. Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й. Вища математика. Основні означення, приклади і задачі. – К.: Либідь, 1994.
10. Маркович Е.С. Курс вищої математики з елементами теорії ймовірностей і  
     математичної статистики: Навч. посібник для вузів. - 2-е вид., перераб. і доп.:  
     Вища. шк., 1972. – 480 с.
11. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М.: Наука, 1984.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. –  
     М.: Наука, 1985, т. 1, 2.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Підручник в   
     2-х томах, т. I. – М.: Інтеграл – Прес, 2002. – 416 с.
14. Рудавський Ю.К., Костробій П.П. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. –  
     Львів, 1999.
15. Соколенко О.І., Новик Г.А. Вища математика в прикладах і задачах. – К.:   
     ”Либідь”, 2001 р.
16. Шипачьов В.С. Основи вищої математики. – М.: Вища школа, 1989.

**ЗМІСТ**

|  |  |
| --- | --- |
| ПО РОБОТІ НАД ДИСЦИПЛІНОЮ “ВИЩА МАТЕМАТИКА”……………. | 3 |
| 1. ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ “ВИЩА МАТЕМАТИКА” (1 СЕМЕСТР)… | 5 |
| ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ………… …………………………….……..…. | 6 |
| КОНТРОЛЬНА РОБОТА №1 … …………………………………….…….. | 23 |
| 2. ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ “ВИЩА МАТЕМАТИКА” (2 семестр)...….. | 31 |
| ДОВІДКОВИЙ МАТЕРІАЛ… ……………..……………………………...… | 32 |
| КОНТРОЛЬНА РОБОТА №2… ………………………………….…..……. | 41 |
| СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ…………………………………………………..….…. | 46 |