МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ МОЛОДІ ТА СПОРТУ

 РЖИЩІВСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНО-ПЕДАГОГІЧНИЙ ТЕХНІКУМ

*Методичний посібник з « математичної логіки » розділ*

*«Множини та операції над ними» для студентів*

 *спеціальності «Програмна інженерія»*

Укладач:

Викладач вищої математики

Коба В.Я

Рецензент

Викладач вищої математики

Корж Н.В

Ржищів 2016

Завдання для аудиторних та домашніх практичних робіт та методичні вказівки до їх виконання (математична логіка) Коба В.Я.

Мета посібника - допомогти студентам засвоїти множини та операції над ними. У посібнику дано розв’язання типових завдань по множинам та операції над ними(що входять до навчальної програми вказаних спеціальностей навчального закладу) та завдання для практичних робіт.

Укладач: Коба В.Я.

Рецензент: Корж Н.В Викладач вищої математики

Ржищівський індустріально педагогічний технікум, 2016

1.Основні поняття теорії множин.

Відповісти на питання «Що таке множина ?» не так просто , як це здається на перший погляд. У повсякденному житті та практичній діяльності часто доводиться говорити про деякі сукупності різних об’єктів: Предметів,понять,чисел,символів тощо. Наприклад, сукупність деталей механізмів, сукупність сторінок в книзі,сукупність книг в бібліотеці , стадо овець, група студентів,сукупність друкарських знаків тощо.

На підставі інтуїтивних уявлень про будь-які подібні чітко визначені сукупності об’єктів сформувалося математичне поняття множини як об’єднання об’єктів у єдине ціле. Саме такої точки зору дотримувався засновник теорії множин німецький математик Георг Кантар.

Множина належить до категорії найзагальніших осново побожних понять математики. Так група математиків, які працювали під псевдонімом Н. Бурбаки , стверджувала: «Множина утворюється з елементів, що мають певні властивості знаходяться у певних відношеннях між собою чи з елементами інших множин »або ж «Логічно кажучи , майже всю сучасну математику можна вивести з єдиного джерела: теорії множин »

Математичне поняття множини пов’язане з абстракцією множини. Суть її полягає в тому що існуючи зв’язки предметів які об’єднуються між собою та з іншими предметами,ігноруються, а замість них предметами, що об’єднуються, приписується нові зв’язки один з одним, які виражають їх належність множині. При цьому вважається що два предмети, які нічим не відрізняється, з одним і тим самим предметом.

Обекти що утворюють множину , називають її елементами , або членами. Прикладом множини може бути множина сторінок книги (кожна сторінка з елементом цієї множини );множина всіх дійсних чисел, більших від 0 і менших від1; множина студентів тощо.

Множина є визначеною, коли можна встановити, чи є будь-який об’єкт її членом або ні.

Для позначення конкретних множин використовують великі літери A,B,C….,

Або великі літери з індексом…(…).

Наведемо ще кілька прикладів множини:

- множина натуральних чисел;

- множина цифр десяткової системи;

- множина цифр двійкової системи;

- множина парних чисел.

ІІ. Способи завдання множин.

1 Вербальний (словесний ) за допомогою опису характеристичних властивостей , які повинні мати елементи множини.

2.Список(перелік) усіх елементів у фігурних дужках.

Стосовно зазначених вище прикладів маємо: 1){1,2,3….}2){1,2,3,4,5,6,7,8,9}3){2,4…..}.

Предикатний(висловлю вальний, подовжувальний ) за допомогою предиката, тобто множина подається у вигляді {x:P(x)}або{x\P(x)},деP(x) набуває значення «істина » для елементів множини. Приклади предикатів 1){1,2,3,4….}={x\xєN},2) {0,1,2…,9}={x\x – цифра десяткової системи }={x\-x=0};4) {2,4,6,..}={x\x- парне число}={x\xєN,x=2n}.

4. Аналітичний

Із наведених прикладів випливає, що множини бувають скінченими та нескінченими. Множини називають скінченими, якщо число їх елементів скінчене, тобто існує натуральне число,яке є числом елементи множини. Множини називаються не скінченими, якщо вони містять нескінчене число елементів.

Для позначення того що х є елементом Х(тобто х належить Х), будемо застосовувати запис х є Х, а запис х є Х Означатиме що елемент не належіть множині Х

ІІІ. Множина і її елементи. Підмножина.

Поняття множина належать для означу вальних понять: точка, пряма,площина,величина. Множина являє собою об’єднання,сукупність зібрання деяких предметів ,об’єднання по якому признаку, по якісь ознаці.

Наприклад, Множина учнів в класі,букв алфавіту,множина цифр десяткової нумерації , множина чисел першого десятка, множина натуральних чисел, множина точок на прямій, множина книг на полиці і т.д.

Предмети, з яких складається множина, називається її елементами. Предмети будь-якої природи може бути,елементами множини.

Наприклад буква «к» - елемент множини українського алфавіту .

Елементи множини позначаються маленькими буквами латинського або грецького алфавіту. Для позначення множини використовують великі літери латинського алфавіту A,B,C….,

Запис а є А означає, що елемент а належить множині А.

Запис а є А означає що елемент а не належить множині А.

Наприклад, якщо N – множина натуральних чисел, то 2 є N,0 є N.

Є два способи задання множини – це перелік його елементів і вказування характеристичної властивості. Тобто вказано така властивість його елементів, яка дає змогу визначити про те, належить даний елемент множині чи ні.

Наприклад,кажучи про множину М всіх парних натуральних чисел, ми вказуємо характеристику властивість його елементів: кожне число,що належить цій множині, ділиться на два. Це записується так :M={x e N\x⁝2}.

Тут фігурні дужки вказують наявність множини ; знак|(вертикальна риска)замість слова «таких, що»; знак « ⁝» читається як «ділиться націло»

Повне читання цього запису таке «Множина М – це множина натуральних чисел х таких, що кожен з них ділиться націло на 2»

Множина яка складається з одних і таких же елементів, називається рівними(однаковими)

 Якщо будь-який елемент множини, В є і елементом множини А то множини В називають під множиною(частиною )множини А.Власна підмножина. В цьому випадку кажуть що В містить в А або, що А Містить Всі пишуть В ⸦ А, або А ⸧ В. За цим означенням, будь-яка підмножина є своєю підмножиною. Розглядають і множину яка не містить ні одного елемента. Таку множину називають порожньою і позначають символом Ø. За означенням, порожня множина є підмножиною будь-якої множини. Таким чином будь-якої підмножини. Таким чином будь-яка підмножина А завжди має дві підмножини А і Ø. Це невласні підмножини

IV.Порожня множина

У теорії множини використовуються поняття порожньої множини. Позначаються вона символом Ø. Множина може взагалі не містити елементів наприклад:

S={x\x-непарне число, що не ділитьс на 2}= Ø

K={xєR\x+1=0}=Ø

Це поняття відіграє дуже важливу роль при задачі множини за допомогою опису. Так, без поняття порожньої множини не можна говорити про множинувідміників групи або про множину дійсних коренів квадратного рівняння, не пересвідчитись зазделегіть чи є в студентській групі відміники або чи задане рівняння дійснв корені. Поняття порожньої множини дає змогу оперувати мсножиною відміників групи, не підклуючи про те, чи є відміники в групі,яка розглядається. Порожню множину умовно відносять до скінчених множин.

Таким числом, уведення порожньої множини дає можливість оперувати будь-якою множиною без попереднього заперечення, існує вона чи ні.

**V. Операції над множинами**

1**.Обєднання А і В(А U В)** - Множина, що складається з усіх елементів множини А, всіх елементів множини В і не містить ніяких інших елементів, тобто A U B={x\xєAvxєВ}. Для графічної будемо використовувати кола Ейлера, які широко застосовуються в теорії множин.

2.Переріз А і В(A U B)- множина, що складається з тих елементів, які налеать одночасно множині А та множині В; тобтоА∩В={x\xєA˄xєB}, де символ˄ позначає логічну операцію конюкції.

 А В

3. Різниця А і В(А\В)- множина що складається з тих і тільки тих елементів, які належать множині В.

Приклади: 1) Якщо А={1;2;3;4}, B={1;2} то A\B{3;4};

2) Якщо A={1;2;3}, B={3;4;5;6}, то А\В {1;2};

3) Якщо A={1;2;5}, B={1;2;3}, то A\B{1;2;5};

4)Якщо А={1;2}, B={1;2;3}, то A\B=Ø.

 А В

4.Доповнення до множини. Якщо А...В то різниця А\В називається допоненням множини В до множини А. Наприклад доповнення до множини всіх раціональних чисел є множина всіх дробових чисел. Якщо ж розглядати доповнення цій множині буде множина всіх дробових чисел і всіх іраціанальних чисел.

5. Дизюктивна сума А і В(семитрична різниця)- множина, що складається з усіх елементів А, які не належать В, й усіх елементів В, які не належатьмножині А, та яка не містить ніяких інших елементів, тобто A+B={x\x є A + x є B}.

 А В

Очевидно, що ......................

6.Прямим (або) декартовим добутком множини А і В

називається множина всіх випадкових пар елементів (а,в) з яких перший множині А, а другій - множині В: A×B={(x; y) | x єA˄xєB}

 Порядок сходження пар може бути будь-яким, але розташування елементів у кожній парі визначається порядок множин, що перемножуються. Тому A×B≠B×A, тобто прямий добуток властивості комутативності не має.

Впорядкована послідовність із n елементів ($a\_{1}a\_{2}a\_{3}$), яка називається ще кортежем або вектором завдожки n. Для прямого добутку виконуються властивість дистрибутивності відносно обєднання, перерізу і відносно доповнення (різниці).

Якщо як співмножник декартового добутку n-множини використовується одна множина А то, записується так: A×A×A×…..×A=$A^{n}$

Приклад. нехай А={2;5;7;9},B={2;4;7}. Тоді А х В={(2;2), (2;4) (2;7) (5;2), (5;4), (5;7), (7;2), (7;4), (7;7), (9;2), (9;4), (9;7)}.

Якщо множина А і В будуть однакові то тоді прямий добуток називають декартовим квадратом і позначають А.....А=....

**VI.Універсум U. Універсальна множина**.

Зручно сукупність допустимих об’єктів зафіксувати явно та вважати, що множини які розглядають, складаються з елементів усієї сукупності. Її називають основною множиною (Універсамом) і позначають U.

Універсамом U арифметики - числа, універсам U зоології тварин і т.д.

 Будь-яку множину розглядатимемо у зв’язку з універсамом, який на колах Ейлера асоціюватимемо з прямокутником на площині, всередині якого знаходиться множини.

Нова Операція U-A=A

 U

*Означення*. Множина А називається підмножиною множини В,якщо кожен елемент множини А є елементом В.

Позначається так: А⸦В

Говорять, що множина В є істиною або власною, підмножиною А, якщо В⸦А і В≠А.

Неістинні або невласні підмножини Ø та U будь-якої множини А.

Потрібно розрізняти елементи множини та підмножини та усієї множини. Наприклад. Коли пишуть а є {a;b;c}, це означає, що множина , а є членом множини що складається з трьох елементів:

a,b,c. А коли пишуть {a}⸦{a;b;c}, це означає, що множина, що складається з одного елемента а, є підмножиною множини, яка складається з трьох елементів: a,b,c.

Означення. Дві множини рівні, якою вони складаються з одних і тих самих елементів А=В.

Наприклад,{1;2;3}={3;2;1}.

Якщо A⸦B і B⸦A, то А=В.

Якщо А⸦В і В⸦С, то А⸦С.

Порожня множина єдина.

Справедливі такі твердження : 1) А⸦ВUА; 2) B⸦A U B; 3) A∩B⸦A; 4) A∩B⸦B 5)A\B⸦A.

Задачі і вправи для самостійної роботи

**VII.Вправи до теми «Множини і операції над ними».**

1. Визначить дві різні точки А і В і проведіть два промені [*Ay*) і [*By*) так, щоб В є[*Ax*), A є[*By*).Скільки різних променів, відрізків і прямих утворилось на креслені ?

2.Назвіть і зобразіть фігуру, яка є об’єднанням променів (вправа 1):а)[Ax) і [Ay) б)[Bx) і [By) в)[Bx) і [Ay); г)[Ax) і [By); д)[Ay)і[By); е)[Bx) і [Ax).

3.Назвіть і зобразіть фігуру, яка є перерізом променів, об’єднання яких треба було знайти у вправі 2.

4. Назвати і показати фігуру, яка є об’єднанням (дивитися вправу 1)

А) променя Ау і відрізка АВ;

Б) променя Вх і відрізка АВ;

В)променя Ах і відрізка ху;

Г)променя Ау і відрізка ху;

Д) променяАВ і відрізка ху;

5. Назвіть і зробіть фігуру, яка є перерізом фігури, обєднання яких треба було знайти у вправі 4.

6.Нехай А={-4;-3;-2;-1;0;1;2}, B={4;3;2;1;0;-1;-2},C={-4;-3;….3;4}. Знайти множини

7.Нехай N – множина натуральних чисел; z-множина усіх числа множини А,В і С визначені у вправі 6. Знайти A∩N, B∩ z, AUN, B U z, N∩z,(A∩B)∩N.

8. Нехай М – множина значень виразу 3,5-9а при а=-1; 0,35. Запишіть всі підмножини М.

9. Нехай N-множина натуральних чисел; z –множина цілих чисел;Q-множина раціональних чисел; R- множина дійсних чисел. Які ці множини зв’язані між собою ?

10. Вказати порожні множини серед наступних:

а)множення цілих коренів рівняння $х^{2}$ -9 = 0;

б)множення цілих коренів рівняння $х^{2}$ +9 = 0;

в)множина дійсних коренів рівняння $\frac{1}{х}$=0;

г)множина натуральних чисел менше1;

д) множина натураьних чисел, що є ні прростими ні складеними.

11. З 40 студентів технікуму 32 виписують газету «Сегодня» 21 випусують журнал «Наука і техніка»,15 студентів виписують і газету і журнал. Скільки студентів не виписують ні газети ні журнал.

VIII. Вправи до теми «Декартів добуток множин».

1. Дано рівняння 2х-у=3. Запишіть декілька розв’язки даного рівняння. Що являє собою кожний розв’язок? Чи пара (4;5)є розвязкомданого рівняння? А пара(5;4)?
2. Елементами множини А і В є пари чисел:А={(1,12), (2,9), (3,6),(4,3),(5,0)} B={(1,9),(2;7),(3,6),(4,7),(5,0)}.Які пари чисел ввійдуть в переріз даних множини? А які в обєднання?
3. Запишіть множину дробів чисельником яких є число з множини А={4,5}, а знамеником – число з множини В={3,7,9}.
4. Перечислити елементи декартового добутку А×В, якщо:
5. A={a,b,c,d},B={b,n,r};
6. A={a,b,c}, B={a,b,c};
7. A={a,b,c,d}, B= Ø;
8. A= Ø, B={b,n,r};

5.Дано множини А={a,b}і {c,d}. Чи можна С декартовим добутком множин А і В, якщо:

1) С={(a, c) (a, d)(b, c)(b, d)};

2){(a, d),(b, d),(a, c)};

3) {(a, d),(b, d) (c, d), (a, c)};

6. Запишіть різні двоцифрові числа, використовуючи числа1,2,3,4. Скільки серед них таких, запис яких починається записом 3?

7.Скільки літер в слові «барабан». Скільки різних літер у цьому слові? Переформулюйте цю задачу використовують поняття множини і кортежа.

8. Чим відрізняється множина цифр в записі числа 56576 від кортежа цифр в його запису?

9.За допомогою цифр 1,2,3запишіть всі можливі трицифрові числа.Скільки таких чисел одержали?

Зміст

1.Основні поняття теорії множини.

2.Способи задання множини.

3.Множина і її елементи. Підмножина.

4.Порожня множина.

5.Операції над множинами.

6.Універсум U.Універсальна множина.

Задачі і вправи для самостійної роботи

7. Вправи до теми «Множини і операції над ними».

8. Вправи до теми «Закони перерізу і об’єднання множин».

9. Вправи до теми «Декартів добуток множин».

Література

1.Г.НЯковлів «Алгебра і початки аналізу».

2.А.І.Бородін «Математика».

3.Ю.М.Бардачов та ін.. «дискретна математика».

4.В.М.Кухар,Б.Н.Білий «Теоретичні основи математики».

5. В.М.Кухар, С.І.Тадіян «Математика. Практикум».

6.Я.В.Хромой «Математична логіка».