МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ МОЛОДІ ТА СПОРТУ

 РЖИЩІВСЬКИЙ ІНДУСТРІАЛЬНО-ПЕДАГОГІЧНИЙ ТЕХНІКУМ

*Методичні рекомендації з «Теорії ймовірності та математичної статистики»*

Укладач:

Викладач вищої математики

Коба В.Я

Рецензент

Викладач вищої математики

Корж Н.В

Ржищів 2017

ВИКОРИСТАННЯ

ФОРМУЛ КОМБІНАТОРИКИ

ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Безпосередній підрахунок імовірностей подій значно спрощується, якщо для попереднього обчислення  *m і n* використовується формули комбінаторики. При цьому правильність розв’язування задачі залежить від уміння визначить вид сполучень, що утворюють сукупність подій, про які йдеться в умові задачі.

 Розбір задач можна провести з § 4 р. XIII підручника [1].

СХЕМА БЕРНУЛЛІ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛІ

Багато задач теорії ймовірностей зводяться до схеми, що називається *схемою Бернуллі.*

У деякому експерименті нас цікавить подія *А* відбудеться *m* разів *(m ≤ n)?*

Відповідь на поставлене запитання дає формула Бернуллі:

*P m,n  =* $c\_{n}^{m}$*p m qn-m,* де *q = 1 – p .*

Для засвоєння формули і відпрацювання умінь пошуку підходів до розв’язання розглянемо задачі.

1.Яка ймовірність того, що при десяти кидках грального кубика 3 очки випадуть рівно 2 рази?

*Розв’язання*

 Тут *n = 10, m = 2, p =* $\frac{1}{6}$ *, q =* $\frac{5}{6}$ *і*

*P2,10 (A) =* $C\_{10}^{2}$ *(*$\frac{1}{6}$*)2 ⸱ (*$\frac{5}{6}$*)8 =* $\frac{10⸱9}{1\*2} $*⸱*$\frac{5^{8}}{6^{10}}$ *= 0,29*

2.Десять осіб одночасно йдуть обідати в одну з двох їдалень з однаковою кількістю місць. Кожний може піти в будь-яку з цих їдалень з імовірністю *P*, незалежно від вибору їдальні іншими. Скільки місць повинно бути в кожній їдальні, щоб імовірність того, що людина не стоятиме в черзі, була більшою від 0,8? Знайти кількість місць у їдальні підбором.

*Розв’язування*

З умови зрозуміло, що коли в кожній їдальні буде по 10 місць, то черги не буде. Але цю кількість місць взято з великим запасом. Також зрозуміло, що кількість місць не може бути меншою від 5. Нас цікавить імовірність події

*A* – «в обоих їдальнях немає черги». Введемо подію *Ak*- «до їдальні 1 прийшло *k* осіб». Для знаходження *P(Ak)* можна використати формулу Бернуллі, оскільки експеримент полягає в тому, що *k* із 10 осіб з імовірністю *p* вибирають для обіду їдальню 1. І всі 10 випробувань за умовою задачі проводяться незалежно.

Отже, за формулою Бернуллі, якщо *p =*$\frac{1}{2}$ = *q*.

маємо:

 *P (Ak) = Pk.10 =*$C\_{10 }^{k}$*(*$\frac{1}{2}$*)10  =* $\frac{C\_{10}^{k}}{1024}$*.*

Нехай у кожній їдальні по 9 місць. Подія *A* відбудеться, якщо відбудеться одна з подій *Ak*, де *k =* 1, 2, …, 9. Тобто

 *A = A1 + A2 + … + A9*

Оскільки події *Ak,* де *k = 1,2,…,9* несумісно, то

 *P(A) = P (A1 + A2 + … +A9)=*

*=P(A1) + P(A2) + … + P(A9) =*

*= (*$C\_{10 }^{1}$*+* $C\_{10}^{2}$ *+ …*$ C\_{10}^{9}$ *)*$⸱ \frac{1}{1024} $*> 0.99.*

Отже, по 9 місць теж забагато.

Припустимо, що в кожній їдальні по 8 місць. Міркуючи аналогічно, маємо, що

*A= A3 + A3 + … +A8.*

*P(A)= P(A2) + P (A3) + … + P (A8) =*

*= (*$C\_{10}^{2}$*+* $C\_{10}^{3}$*+ … +* $C\_{10}^{8}$*) ⸱* $ \frac{1}{1024} $*> 0.97.*

 Розглянемо випадок, коли в кожній їдальні по 7 місць. Тоді

*A= A3 + A4 + A5 + A6 + A7.*

*P(A)= P(A3) + P(A4) + P(A5) + P(A6) + P(A7) .=*

*=*$\frac{C\_{10}^{3}}{1024}+\frac{C\_{10}^{4}}{1024}+\frac{C\_{10}^{5}}{1024}+\frac{C\_{10}^{6}}{1024}+\frac{C\_{10}^{7}}{1024}=\frac{912}{1024}$*>0.89.*

Таким чином, мати по 7 місць у їдальнях достатньо.

А чи не можна обійтись шістьма місцями?

*A= A4 + A5 + A6.*

$\frac{C\_{10}^{4}}{1024}+\frac{C\_{10}^{5}}{1024}+\frac{C\_{10}^{6}}{1024}$ *=* $\frac{672}{1024}$ *= 0,66.*

Шести місць у їдальнях недостатньо.

3.Імовірність того, що витрата електроенергії протягом доби не перевищить установленої норми, дорівнює 0,75. Знайти ймовірність того, що в найближчі 6 діб витрата електроенергії протягом 4 діб не перевищить норми.

*Розв’язання*

Імовірність нормальної витрати електроенергії протягом кожної із 6 діб стала і дорівнює 0,75. Тобто ймовірність перевитрати електроенергії кожної доби теж стала і дорівнює

*q = 1 – p = 1 – 0,75 = 0,25.*

Шукана ймовірність за формулою Бернуллі дорівнює:

*P6(4) =* $C\_{6}^{4}$ *p4q2 =* $\frac{6⸱5⸱(0,75)^{4}⸱(0,25)^{2}}{1⸱2}$ *= 0,3.*

Далі можна розібрати розв’язання задач із § 8 р. XIII підручника [1] і п. 40 підручника [2].

*Випадкові величини ,їх характеристики*

Метою уроку є формування уявлення про випадкову величину ї закон розподілу, навичок складання законів розподілу в найпростіших ситуаціях.

Часто зустрічаються випробування, результатом яких є випадкові числа.

Наприклад, кількість викликів, що надходять на телефонну станцію за деякий проміжок часу, піддається випадковим коливанням, кількість аварій автотранспорту протягом доби залежить від випадку .Такі величини називають *випадковими .*

Випадковою величиною називається величина, якій ми не можемо приписати певне значення, але можемо приписати кілька значень з деякими визначеннями ймовірностями. Природно вважається, що величина завжди має якесь значення, так що сума ймовірностей, що приписується всім значенням, дорівнює 1. Будемо розглядати “звичайну” детерміновану (що має певне значення) величину як випадкову, що набуває єдиного значення з імовірністю 1.

Наприклад, вимірюють довжину деякого обрізка лінійкою, на яку нанесені міліметрові поділки, але в погоні за точністю прагнуть на око визначити десяті частини міліметра. Нехай при десяти вимірюваних вийшло: один раз 21,3 мм, три рази 21,4 мм, чотири рази 21,5 мм і два рази 21,6 мм. Результати вимірювань можна вважати значеннями випадкової величини з імовірностями відповідно 0,1; 0,3; 0,4; і 0,4.

Узагальнимо:експерименту, наслідком якого є поява чи не поява події А з імовірностями р і q = 1 – р природно поставити у відповідність випадкову величину, що набуває значення 1 і 0 з імовірностями p i q.

При n-кратному проведенні такого експерименту виникає випадкова величина зі значеннями 0,1, …,k , …,n , причому значенню k приписується ймовірність, що дорівнює C$ \frac{k}{n}$ $p^{k}$q n-k (формула Бернуллі).

*Випадковою величиною* називають функція, визначена на просторі елементарних подій. Позначають: X = X(u), Y = (u), Z = (u), а їх значення відповідно малими буквами. На випадкові величини поширюються всі правила дії з функціями – їх можна додавати, множити тощо.

*Приклад 1*. Численними спостереженнями встановлено, що спортсмен при 100 пострілах 20 раз вибирає 8 очок, 50 раз – 9 очок і 30 раз – 10 очок. Що можна сказати про кількість очок, що вибирає спортсмен за два постріли?

*Розв’язання*

Визначимо ймовірність результатів експерименту. Подія (8; 8) є добутком двох незалежних подій “при першому пострілі вибити 8 очок” і “при другому пострілі вибито 8 очок”. Імовірність кожної з цих подій дорівнює 0,2. За теоремою множення ймовірностей

P(8; 8) = 0,2⸱0,2 = 0,04.

Аналогічно:

P(8; 9) = 0,2⸱0,5 = 0,1;

P(9; 8) = 0,5⸱0,2 = 0,1;

P(9; 10) = 0,5⸱0,3 = 0,15;

P(10; 9) = 0,3⸱0,5 = 0,15;

P(8; 10) = 0,2⸱0,3 = 0,06;

P(9; 9) = 0,5⸱0,5 = 0,25;

P(10; 8) = 0,3⸱0,2 = 0,06;

P(10; 10) = 0,3⸱0,3 = 0,09.

Зведемо ці результати в таблицю (табл.1)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Результати експерименту | Сумавибитихочок | Імовірність |
| (8; 8) | 16 | 0,04 |
| (8; 9) | 17 | 0,1 |
| (8; 10) | 18 | 0,06 |
| (9; 8) | 17 | 0,1 |
| (9; 9) | 18 | 0,25 |
| (9; 10) | 19 | 0,15 |
| (10; 8) | 18 | 0,06 |
| (10; 9) | 19 | 0,15 |
| (10; 10) | 20 | 0,09 |

$$Место для уравнения.$$

У другому рядку таблиці наведені всі можливі значення, яких набуває величина X , у третьому – відповідні ймовірності. Ця таблиця задає деяку функцію, що називається *Законом розподілу випадкової велечини*

*X (P(X) = x).*

У загальному вигляді це можна записати так, як у (табл 2.)

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  X$ $k |  X1 |  X2 |  … |  Xn |
|  Pk |  P1 |  P2 |  … |  Pn |

*Законом розподілу* випадкової величини Х називається функція, що кожному значенню *х* випадкової величини Х ставить у відповідність P(X = *x ).*

Тут *x1, x2,* ..., *xn*  - усі значення величини Х, а Pk = P(X = *x*k), k= 1,2, …, n – імовірності , з якими Х набуває цих значень.

Події {X = *x1*}, …,{X = *x*n} попарно несумісні ,і їх сума є достовірною подією. Тому сума ймовірностей цих подій

P1 +P2 +…+Pn  = 1.

Цю рівність можна використовувати для перевірки правильності складання закону розподілу випадкової величини.

**Приклад 2.** Кількість очок, що вибиває кожний із двох спортсменів, мають відповідно закони розподілу:

 1-й спортсмен

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  Xk  |  8 |  9 |  10 |
|  Pk |  0,4 |  0,1 |  0,5 |

 2-й спортсмен

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  Xk  |  8 |  9 |  10 |
|  Pk |  0,1 |  0,6 |  0,3 |

 Який із двох спортсменів стріляє краще?

Тільки за заданим законів розподілу важко відповісти на це запитання – 8 очок перший вибиває частіше за другого, але ймовірність влучення в ”десятку” у нього вища. Потрібна числова характеристика, яка б допомогла оцінити стрільбу кожного.

*ДИСПЕРСІЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ*

Метою уроку є формування в учнів уявлення про міру розсіювання значень випадкової величини навколо середнього значення, навичок обчислення дисперсії.

*Дисперсія випадкової величини* X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$DX=M(X-MX)^{2}$$

Можна сказати, що дисперсія характеризує, наскільки широко розкидані значення випадкової величини навколо свого середнього значення. Чим дисперсія менша, тим тісніше (у середньому) примикають величини до середнього значення.

*Середнім квадратним відхиленням величини* називається корінь квадратний з її дисперсії:

$$δ\left(x\right)=\sqrt{DX}$$

**Приклад 6.** Випадкова величина X має закон розподілу:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xₖ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
| Pₖ | 0,1 | 0,1 | 0,2 | 0,1 | 0,2 | 0,3 |

Знайти дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

***Розв’язання***

Спочатку знайдемо MX:

MX = (–3) • 0,1 + (–2) • 0,1 + (–1) • 0,2 + 0 • 0,1 + 1 • 0,2 + 2 • 0,3 = 0,1

Складаємо закон розподілу випадкової величини:

$$Y=(X-0,1)^{2}$$

DX = M$(X-0,1)^{2}$ = 9,61 • 0,1 + 4,41 • 0,1 + 1,21 • 0,2 + 0,01 • 0,1 + 0,81 • 0,2 + 3,61 • 0,3 = 2,89

$$δ\left(x\right)=\sqrt{DX}=1,7$$

Математичне сподівання і дисперсія характеризуються такою екстремальною властивістю. Нехай b – деяке число і $F(b)=M(x-b)^{2}$ середнє значення квадрата відхилення значень величини X від числа b. Тоді F(b) має мінімум, якщо b = MX, і цей мінімум дорівнює дисперсії.

Справді, нехай MX = C. Тоді

$F\left(b\right)=M\left(X-C+C-b\right)^{2}=\left(C-b\right)^{2}+2\left(C-b\right)M\left(X-C\right)+M\left(X-C\right)^{2}$=

$=(C-b)^{2}+DX$ *,*

оскільки M ( X – C ) = 0.

З цього видно, що F(b) досягає мінімуму, якщо b = C = MX. І цей мінімум дорівнює DX.

Для дисперсії можна вказати іншу формулу:

$$DX=M\left(X-C\right)^{2}=M\left(X^{2}-2XC+C^{2}\right)=M\left(X^{2}\right)-2CMX+C^{2}=MX^{2}-C^{2}=MX^{2}-\left(MX\right)^{2}$$

*Властивості дисперсії*

Якщо C = const, то

$D\left(X+C\right)=DX$*;*

$D\left(CX\right)=C^{2}DX$;

$DC=0$.

Вибіркове середнє дає уявлення про математичне сподівання випадкової величини. Аналогічно можна дати означення наближеного значення випадкової величини.

*Вибірковою дисперсією* називається вираз

$$S^{2}\sum\_{i=1}^{m}(x\_{i}-\overbar{x}^{2})\frac{n\_{i}}{n}$$

де $ x\_{1}$, $x\_{2}$, …, $x\_{m}$ – різні значення випадкової величини, що очікуються, $n\_{1}$, $n\_{2}$, …, $n\_{m}$ – їхні частоти , $n\_{1}$ + $n\_{2}$ + … + $n\_{m}$ – загальна кількість сподівань, $x$ – вибіркове середнє.

Вибіркова дисперсія є середнім усіх квадратів відхилень результатів спостереження від його середнього значення $\overbar{x}$. Величина ζ , що дорівнює кореню квадратному з вибіркової дисперсії,є *вибірковим середнім квадратичним*, або *стандартним відхиленням.*

**Приклад 7.** Два спортсмени виконали по 100 пострілів. Перший вибив 8 очок 40 раз, 9 очок – 10 раз, 10 очок – 50 раз. Другий 8, 9, 10 очок вибив відповідно 10, 70, 20 раз. Хто стріляє краще?

***Розв’язання***

Маємо дві вибірки, складені зі спостережень за випадковою величиною $X\_{i} (i=1, 2)$ – кількість очок, що вибиває кожен із двох спортсменів. Підрахуємо вибіркове середнє:

$\overbar{x}\_{1}=\frac{1}{100}\left(8•40+9•10+10•50\right)=9,1$,

$\overbar{x}\_{2}=\frac{1}{100}\left(8•10+9•70+10•20\right)=9,1$.

Підраховуємо вибіркову дисперсію.

1-й спортсмен

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{k}$$ | $$n\_{k}$$ | $$x\_{k}n\_{k}$$ | $$x\_{k}-\overbar{x}$$ | $$(x\_{k}-\overbar{x})^{2}$$ | $$(x\_{k}-\overbar{x})^{2}n\_{k}$$ |
| 8 | 40 | 320 | –1,1 | 1,21 | 48,4 |
| 9 | 10 | 90 | –0,1 | 0,01 | 0,1 |
| 10 | 50 | 500 | 0,9 | 0,81 | 45,0 |
| ∑ | 100 | 910 |  |  | 93,5 |

$X\_{1}=\frac{1}{100}∙910=9,1$,

$S\_{1}^{2}=\frac{1}{100}∙93,5=0,935$.

2-й спортсмен

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x\_{k}$$ | $$n\_{k}$$ | $$x\_{k}n\_{k}$$ | $$x\_{k}-\overbar{x}$$ | $$(x\_{k}-\overbar{x})^{2}$$ | $$(x\_{k}-\overbar{x})^{2}n\_{k}$$ |
| 8 | 10 | 80 |  |  |  |
| 9 | 70 | 720 |  |  |  |
| 10 | 20 | 200 |  |  |  |
| ∑ | 100 |  |  |  |  |

$X\_{1}=\frac{1}{100}∙910=9,1$,

$S\_{2}^{2}=\frac{1}{100}∙29=0,29$.

Оскільки $S\_{2}^{2}<S\_{1}^{2}$, то можна вважати, що $DX\_{2}>DX\_{1}$, тобто результати стрільби другого спортсмена менш розсіяні. Отже, другий спортсмен стріляє краще ніж перший.

***МАТЕМАТИЧНЕ СПОДІВАННЯ***

Метою уроку є формування уявлення про математичне сподівання та вироблення навичок його обчислення.

Для виведення поняття математичного сподівання розглянемо приклад.

**Приклад 3.** Випущено 500 лотерейних білетів, причому на кожний із 40 білетів випадає виграш 1 грн., 10 білетів принесуть власникам виграші по 5 грн., 5 білетів – по 10 грн. Решта білетів не виграють. Який середній виграш випаде на один білет?

**Розв’язання**

Середній виграш, що випаде на один білет, дорівнює сумі всіх виграшів, поділених на кількість випущених білетів:

$\frac{1 ⸱ 40 + 5 ⸱10 + 10 ⸱ 5 + 0 ⸱ 445}{500}$ =

= $1 ⸱ \frac{40}{500} $+ $5 ⸱\frac{10}{ 500}$ +$10 ⸱ \frac{5}{500}$ + $0 ⸱ \frac{445}{500}$ =

= 0 ⸱ 0,89 + 1 ⸱ 0,08 + 5 ⸱ 0,02 + 10 ⸱ 0,01 = 0,08 (грн).

 У цьому прикладі йдеться про випадкову величину – виграш, що випадає на один обраний навмання білет.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xk* | 0 | 1 | 5 | 10 |
| *Pk* | 0,89 | 0,08 | 0,02 | 0,01 |

Середній виграш дорівнює сумі добутків значень випадкової величини на ймовірність, з якою вона набуває цих значень.

Якщо значення випадкової величини *Х* дорівнюють ***х***1, ***х***2, …, ***х***n  з імовірностями *P*1, *P*2, …,  *Pk*,  *P*n, то *середнім значенням* *Х* або *математичним сподіванням* називається сума добутків значень випадкової величини на відповідні ймовірності:

*МХ =* ***х***1 *P*1 + ***х***2 *P*2 *+* ... *+* ***х***n *P*n .

Якщо *P*1 = *P*2 *=* … = *P*n , то середнє значення випадкової величини дорівнює середньому арифметичному її значень.

Тепер можна відповісти на запитання, поставлене у прикладі 2. Якщо *Хі* (*і* = 1, 2) – кількість очок, що вибиває *і*-й спортсмен при одному пострілі, то

*МХ*1 = 8 ⸱ 0,4 + 9 ⸱ 0,1 + 10 ⸱ 0,5 = 9,1 ,

*МХ*2 = 8 ⸱ 0,1 + 9 ⸱ 0,6 + 10 ⸱ 0,3 = 9,2 .

**Приклад 4.**  Складаючи приклад для точного припасовування деякої деталі, необхідно виконати кілька спроб. При цьому деталь, забракована при складанні першого приладу, уже не використовується для складання інших. Для встановлення кількості деталей, якими потрібно забезпечити працівника, було проведено 100 спостережень. Виявилося, що в 7 випадках знадобилася одна спроба, в 16 – дві, у 55 – три, у 21 – чотири, і в 1 випадку – п’ять спроб. Знайти середню кількість деталей, потрібних для складання одного приладу.

**Розв’язання**

Відповіддю на запитання задачі буде математичне сподівання кількості деталей, потрібних для складання приладу. За результатами 100 спостережень можна підрахувати вибіркову середню кількість:

х󠇠 = $\frac{1}{100}$ ⸱ (1 ⸱ 7 + 2 ⸱ 16 + 3 ⸱ 55 + 4 ⸱ 21 + 5 ⸱ 1) = 2,91

Отже, працівнику для складання приладу потрібно приблизно 3 деталі.

У зв’язку з дефіцитом часу властивості математичного сподівання розглядаються без доведення.

**Властивість 1.** Для будь-якої випадкової величини *Х* і довільного числа *С* має місце рівність:

*М(СХ) = СМХ*

**Властивість 2.**  Математичне сподівання сталої *С*  дорівнює самій сталій *С:*

*М(С) = С*

**Властивість 3.**  Математичне сподівання суми двох випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань цих величин:

*М(Х + Y) = MX + MY*

**Приклад 5.** У цеху встановлені два різні верстати, що виготовляють однакові деталі. Кількість бракованих виробів, що можуть виготовити ці верстати за добу, мають такі закони розподілу:

1-й верстат

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xk* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Pk* | 0,6 | 0,2 | 0,15 | 0,05 |

2-й верстат

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xk* | 0 | 1 | 2 | 3 |
| *Pk* | 0,5 | 0,25 | 0,2 | 0,05 |

1. Знайти середню кількість бракованих деталей, що виготовляє перший верстат за 10 діб.
2. Якою є середня кількість бракованих деталей, що виготовляються цехом за добу?

***Розв’язання***

Нехай *Х* і *Y*  - кількість бракованих деталей, що виготовляють відповідно перший і другий верстати за добу.

*MX* = 0,65, *MY* = 0,8

За 10 діб перший верстат виготовить 10*X* бракованих деталей.

*М(*10*Х) =* 10*MX =* 6,5

Цех за добу виготовляє *Х + Y* бракованих деталей.

*М(Х + Y) = MX + MY =* 0,65 + 0,8 = 1,45

Далі розв’язуються задачі.

1. Знайти математичне сподівання величини *Z,* якщо:

а) *Z* =2*Х –* 3*Y,* коли *МХ* =3, *MY* =1;

б) *Z* =–*Х +* 3*Y,* коли *МХ* =2, *MY* = 0;

2. Дано закон розподілу величини *Х*:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *xk* | –2 | 0 | 1 | 4 |
| *Pk* | 0,3 | 0,2 | 0,4 | 0,1 |

Знайти *М*(–2*Х* + 3).

3. Випадкові величини *Х*1, … , *Х*n мають одне й те саме математичне сподівання *а.* Знайти *MY,*  якщо

Y = $\frac{1}{n}$ $ \sum\_{i=0}^{n}X$n

4. Імовірність влученням м’ячем у кільце при одному кидку для двох баскетболістів дорівнює 0,7 і 0,8. Знайти середню кількість влучень, якщо баскетболісти зробили:

а) по одному кидку;

б) по 10 кидків.